

Inégalité de Hoeffding

Bernis
+ Probab 2 p 217.
p 131.

Théorème: Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, centrées

On suppose : $\exists (c_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |X_n| \leq c_n$ presque sûrement.

Alors, $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2 \sum_{h=1}^n c_h^2}\right)$

Lemme: Soit X une variable aléatoire réelle centrée et presque sûrement bornée par 1.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$

Preuve Lemme: Soit $x \in [-1, 1]$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} \frac{1-x}{2} + \frac{1+x}{2} = 1 \\ \frac{1+x}{2} \in [0, 1] \\ \frac{1-x}{2}(-t) + \frac{1+x}{2}t = tx. \end{cases} \quad \text{Donc par convexité de } t \mapsto \exp(t), \text{ on a } \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\exp(tx) \leq \frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{1+x}{2} e^t. \quad (1)$$

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a : $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \mathbb{E}\left(\frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{1+x}{2} e^t\right)$ par (1)
 $\leq \frac{1}{2} (e^{-t} + e^t)$ par linéarité de l'espérance et $\mathbb{E}(X) = 0$.
 $\leq ch(t).$

Or $\forall h \in \mathbb{N}^*, 2^h h! = 2 \times 4 \times \dots \times 2h \leq (2h)!$ d'où $ch(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{2h}}{(2h)!} \leq e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^{2h}}{2^h h!}$

D'où $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}} \quad (2)$

Preuve Théorème: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. Par continuité de la fonction exponentielle, $(\exp(tX_h))_{h \in \mathbb{N}^*}$ est aussi une famille de variables aléatoires indépendantes.

De plus, $\forall h \in \mathbb{N}^*, \frac{X_h}{c_h}$ est centrée et on a $\frac{X_h}{c_h} \leq 1$ presque sûrement.

On peut donc appliquer le Lemme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tS_n}) &= \mathbb{E}\left(e^{t \sum_{h=1}^n X_h}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{h=1}^n e^{tX_h}\right) \\ &= \prod_{h=1}^n \mathbb{E}\left(e^{t c_h \frac{X_h}{c_h}}\right) \\ &\leq \prod_{h=1}^n e^{\frac{t^2 c_h^2}{2}} \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{h=1}^n c_h^2\right) \quad (3) \end{aligned}$$

par (2)

Soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Par stricte croissance de l'exponentielle, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $IP(S_n > \varepsilon) = IP(\exp(tS_n) > \exp(t\varepsilon))$

De plus, comme $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(tS_n)$ est une variable aléatoire positive, on peut appliquer Markov. D'où $IP(S_n > \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} IE(e^{tS_n}) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 - t\varepsilon\right)$

Or l'étude de $t \mapsto \frac{t^2}{2} \sum_{k=1}^n c_k^2 - t\varepsilon$ donne son minimum en $t_{\min} = \frac{\varepsilon}{\sum_{k=1}^n c_k^2}$ par (3) de valeur $-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}$ d'où $IP(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right)$ (4).

Ainsi, comme la suite $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les mêmes hypothèses que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $IP(-S_n > \varepsilon)$ vérifie (4). D'où $IP(|S_n| > \varepsilon) = IP(\{S_n > \varepsilon\} \cup \{S_n < -\varepsilon\})$

$$= IP(S_n > \varepsilon) + IP(-S_n > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right)$$

Application: Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n c_k^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$.

Alors $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P.d} 0$

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, Hoeffding nous donne $IP(|S_n| > n^\alpha \varepsilon) \leq 2 \exp\left(\frac{-n^{2\alpha} \varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right)$

Or $\exp\left(-\frac{n^\beta \varepsilon^2}{2}\right) = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc par comparaison des séries à termes général positif, on a $\sum_{n \geq 1} IP(|S_n| > n^\alpha \varepsilon) < \infty$.

Donc par Borel-Cantelli on a $\forall \varepsilon > 0$, $IP(\limsup \{|\frac{S_n}{n^\alpha}| > \varepsilon\}) = 0$.

Puisque $\mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable, on a $IP\left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \limsup \{|\frac{S_n}{n^\alpha}| > \varepsilon\}\right) = 0$.

Donc par passage au complémentaire $IP\left(\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \liminf \{|\frac{S_n}{n^\alpha}| \leq \varepsilon\}\right) = 1$.

D'où $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P.d} 0$