leçons : 205 : Espaces complets 213 : Espaces de Hilbert 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. 253 : Notion de convexité en analyse 223 : Suites numériques 219 : problèmes d'extremums	Optimisation dans un Hilbert (5)	Référence : Ciarlet "Intro à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation"

Thm : Soit H un espace de Hilbert et $J : H \to \mathbb{R}$ convexe, continue et coercive (ie $J(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$). Alors il existe $\alpha \in H$ tel que $J(\alpha) = \inf_H J$.

preuve :

Soit (x_k) une suite dans H telle que $J(x_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \inf_H J$.

① MQ (x_k) est bornée :

Si elle ne l'est pas, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗↗ $\|x_{\varphi(n)}\| \to +\infty$. Par coercivité : $J(x_k) \to +\infty$

Cela contredit la définition de (x_k). D'où $\exists C > 0 \ \forall k \geq 0 \ \|x_k\| \leq C$.

② MQ on peut extraire de (x_k) une sous-suite faiblement convergente.

- $(\langle x_0, x_k \rangle)_k$ est une suite réelle bornée par Cauchy-Schwartz, donc par Bolzano-Weierstrass il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗↗ telle que $(\langle x_0, x_{\varphi_0(k)} \rangle)_k$ converge.

  Par récurrence, supposons avoir construit $\varphi_0, \dots, \varphi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗↗ tq

  $\forall p \in [\![0, i]\!] \ (\langle x_p, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(k)} \rangle)_k$ converge.

  $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(k)} \rangle)$ est bornée par Cauchy-Schwartz et donc il existe $\varphi_{i+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗↗ tq $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{i+1}(k)} \rangle)_k$ converge.

  On pose $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_k(k)$ (procédé diagonal) et $y_k = x_{\psi(k)}$.

  On a alors : $\forall p \in \mathbb{N} \ (\langle x_p, y_k \rangle)_k$ converge.

  et par linéarité $\forall \tilde{v} \in F := \mathrm{vect}(x_p \mid p \in \mathbb{N}) \ (\langle \tilde{v}, y_k \rangle)_k$ converge.

  H est un Hilbert donc $H = \overline{F} \oplus F^\perp$

- MQ $\forall u \in H \ (\langle u, y_k \rangle)_k$ converge.

  Soit $u \in H$ et $\varepsilon > 0$. $u = v + w$ avec $(v, w) \in \overline{F} \times F^\perp$

  $\exists \tilde{v} \in F$ tq $\|v - \tilde{v}\| \leq \varepsilon$.

  $\forall k \geq 0$, $\forall l \geq 0$ $|\langle u, y_k - y_l \rangle| = |\langle v, y_k - y_l \rangle| \leq \underbrace{\|v - \tilde{v}\|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{\|y_k - y_l\|}_{\leq 2C} + |\langle \tilde{v}, y_k - y_l \rangle|$

  $(\langle \tilde{v}, y_k \rangle)_k$ converge donc est de Cauchy donc $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall k, l \geq N \ |\langle \tilde{v}, y_k - y_l \rangle| \leq \varepsilon$

  D'où $\forall k, l \geq N \quad |\langle u, y_k - y_l \rangle| \leq 2C\varepsilon + \varepsilon = (2C+1)\varepsilon$.

La suite $(\langle u, y_k \rangle)_k$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet donc converge.

- On pose $f : \begin{cases} H \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \lim\limits_{k \to +\infty} \langle u, y_k \rangle \end{cases}$ f est linéaire et continue par Cauchy-Schwartz

Par le théorème de représentation de Riesz : $\exists \alpha \in H \quad \forall u \in H \quad f(u) = \langle u, \alpha \rangle$

③ $\underline{\text{MQ} \quad J(\alpha) = \inf\limits_H J}$

Soit $\beta > \inf\limits_H J$. On pose $C_\beta = \{ x \in H \mid J(x) \leqslant \beta \}$

C_β convexe fermé non vide car J convexe continue.

On note $p : H \to H$ l'opérateur de projection sur C_β

$J(y_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \inf\limits_H J$ donc $y_k \in C_\beta$ à partir d'un certain rang.

$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant N \qquad \langle y_k - p(\alpha), \alpha - p(\alpha) \rangle \leqslant 0$

$k \to +\infty$: $\qquad \|\alpha - p(\alpha)\|^2 \leqslant 0$

D'où $\alpha = p(\alpha)$ et $\alpha \in C_\beta$

$\forall \beta > \inf\limits_H J \qquad J(\alpha) \leqslant \beta$. Donc $J(\alpha) = \inf\limits_H J$

Complément sur "Optimisation dans un Hilbert" (réf. Allaire)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in L^2(\Omega)$

On pose $J : \begin{cases} H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ v \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla v\|^2 - \int_\Omega f v \end{cases}$

On veut résoudre $\inf_{H_0^1} J$. [Concrètement, cela revient à minimiser l'énergie mécanique d'une membrane...]

- $H_0^1(\Omega)$ est un Hilbert muni de $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \|\nabla v\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

  idée : utiliser l'inégalité de Poincaré pour montrer que $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ est équivalente à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ où $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega v^2 + \|\nabla v\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

- J est continue :

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega f v$$

D'une part $v \mapsto \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ est continue

D'autre part $\left|\int_\Omega f v\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2} C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ par Poincaré

Donc $v \mapsto \int_\Omega f v$ est une forme linéaire continue.

- J est coercive :

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \left|\int_\Omega f v\right| \geq \frac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

donc $J(v) \xrightarrow[\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty]{} +\infty$

- J est (strictement) convexe :

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega f\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|u-v\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) - \int_\Omega f\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

$$= \frac{J(u)+J(v)}{2} - \frac{1}{8}\|u-v\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

J admet donc un minimum.

- Lien avec Lax - Milgram :

On veut résoudre $\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ sur } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$

$-\Delta u = f \Rightarrow -u\Delta u = fu \Rightarrow -\int u\Delta u = \int fu \Rightarrow \int \|\nabla u\|^2 = \int fu$

On pose $L : \begin{cases} H^1_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \int fu \end{cases}$ L est une forme linéaire continue

$a \begin{cases} H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \longmapsto \int \nabla u . \nabla v \end{cases}$ a est une forme bilinéaire continue.

Par Lax-Milgram : $\exists !\, u \in H^1_0(\Omega)\ \forall v \in H^1_0(\Omega)\ a(u,v) = L(v)$

D'où l'unicité à l'équation $-\Delta u = f$.

Pour l'existence, il faudrait remonter le raisonnement.

Compléments sur les limites faibles (réf Brézis)

Soit (x_n) une suite de E (E Banach)

Alors (i) $x_n \to x$ fortement $\Rightarrow$ $x_n \to x$ faiblement

(ii) si $x_n \to x$ faiblement, alors $(\|x_n\|)$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

(iii) si E Hilbert et $x_n \to x$ faiblement et $\|x_n\| \to \|x\|$, alors $x_n \to x$ fortement

preuve :

(i) MQ $f(x_n) \to f(x) \quad \forall f \in E'$

$\|f(x_n) - f(x)\| \leq \|f\|\, \|x_n - x\|$ □

(iii) $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2$

$\to \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2$

(ii) $\forall f \in E'\ f(x_n) \to f(x)$

$\forall n \quad |f(x_n)| \leq \|f\|\, \|x_n\|$

On passe à la limite inf : $|f(x)| \leq \|f\| \liminf \|x_n\|$

Or, par un corollaire de Hahn-Banach, $\|x\| = \sup\limits_{\substack{\|f\|\leq 1 \\ f \in E'}} |f(x)| \leq \liminf \|x_n\|$

MQ $(\|x_n\|)$ est bornée

$\forall n \in \mathbb{N}$ on pose $\varphi_n : \begin{cases} E' \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x_n) \end{cases}$. $\forall f \in E'\ f(x_n) \to f(x)$ donc la famille

(φ_n) est ponctuellement bornée. Elle est donc bornée : $\exists M\ \forall n \geq 0\ \|\varphi_n\| \leq M$

$\|\varphi_n\| = \sup\limits_{\substack{f \in E' \\ \|f\|\leq 1}} f(x_n) = \|x_n\|$ D'où $(\|x_n\|)$ bornée