

Développement: fonction de Takagi

(une fonction continue, nulle part dérivable)

[chap 2: fonctions d'une variable réelle]

• Xavier Gourdon,

"des maths en tête - Analyse" [p 84]

Thm: On note Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique, dont la restriction à $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ vérifie $\Delta(x) = |x|$

On appelle la fonction de Takagi la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$$

la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue, mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

• Comme Δ est bornée sur $\mathbb{R}$, la série qui définit f est normalement cv. Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$. $(|\Delta(x)| \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout } x)$

• Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{\Delta(2^p x)}{2^p}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
La série de fonctions $\sum \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$ converge uniformément (car normalement) sur $\mathbb{R}$.

Donc par thm sur les séries de fonctions, f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Montrons que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Comme f est 1-périodique, il suffit de montrer que f n'est dérivable en aucun point de $[0; 1]$. On considère l'écriture dyadique de x_0 :

$$x_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k} \quad \text{où } \varepsilon_k \in \{0, 1\} \text{ pour tout } k \geq 1.$$

$$\text{Pour tout } m \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose } x_m = \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_k}{2^k} \quad \text{et } y_m = x_m + \frac{1}{2^m}$$

$$\text{on a } x_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} x_0 \quad \text{et } y_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} x_0$$

Lorsque $p \geq m$,

$$\text{on a } 2^p x_m \text{ et } 2^p y_m \in \mathbb{N}, \text{ donc } \Delta(2^p x_m) = \Delta(2^p y_m) = 0$$

Maintenant, si $p < m$, on a

$$2^p x_m = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^p \varepsilon_k}{2^k} = \sum_{k=1}^p 2^{p-k} \varepsilon_k + \sum_{k=p+1}^m \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}}$$

$$\text{Donc } \Delta(2^p x_m) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^m \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}}\right) \in \mathbb{N}$$

$$\text{Et de même } \Delta(2^p y_m) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^m \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{m-p}}\right) \quad (*)$$

Si $\varepsilon_{p+1} = 0$ on a $0 \leq \sum_{k=p+1}^m \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{m-p}} \leq \sum_{k=p+2}^m \frac{1}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{m-p}} = \frac{1}{2}$

Donc les valeurs de Δ dans (*) sont prises sur un intervalle où Δ croît

Etant donné la forme de Δ ,

$$\Delta(2^p x_m) = \sum_{k=p+2}^m \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \quad \text{et} \quad \Delta(2^p y_m) = \sum_{k=p+2}^m \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{m-p}}$$

Où $\Delta(2^p y_m) - \Delta(2^p x_m) = \frac{1}{2^{m-p}}$ 1-périodicité

Si $\varepsilon_{p+1} = 1$, alors

$$\Delta(2^p x_m) = \Delta\left(N + \frac{1}{2} + \sum_{k=p+2}^m \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}}\right) = \left| -\frac{1}{2} + \sum_{k=p+2}^m \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} \right| = \frac{1}{2} - \sum_{k=p+2}^m \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}}$$

$$\text{et} \quad \Delta(2^p y_m) = \Delta\left(N' + \frac{1}{2} + \sum_{k=p+2}^m \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{m-p}}\right) = \left| -\frac{1}{2} + \sum_{k=p+2}^m \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{m-p}} \right|$$

$$\text{Où} \quad \Delta(2^p y_m) - \Delta(2^p x_m) = \frac{-1}{2^{m-p}} = \frac{(-1)^{\varepsilon_{p+1}}}{2^{m-p}} \quad \text{pour } 0 \leq p < m.$$

Donc dans tous les cas, $\Delta(2^p y_m) - \Delta(2^p x_m) = \frac{(-1)^{\varepsilon_{p+1}}}{2^{m-p}}$ pour $0 \leq p < m$.

On en déduit que

$$f(y_m) - f(x_m) = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{(-1)^{\varepsilon_{p+1}}}{2^m} \quad \text{ou encore} \quad \frac{f(y_m) - f(x_m)}{y_m - x_m} = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{(-1)^{\varepsilon_{p+1}}}{2^m}$$

ce qui montre que la suite (S_m) définie par $S_m = \frac{f(y_m) - f(x_m)}{y_m - x_m}$ ne converge pas

Si maintenant f est dérivable en x_0 , d'après la formule de Taylor-Young, on a

$$\begin{cases} f(x_m) - f(x_0) = (x_m - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon_m) \\ f(y_m) - f(x_0) = (y_m - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon'_m) \end{cases} \quad \begin{matrix} \varepsilon_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \\ \varepsilon'_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{matrix}$$

Par différence, on a $f(y_m) - f(x_m) = (y_m - x_m)f'(x_0) + (x_0 - x_m)\varepsilon_m + (y_m - x_0)\varepsilon'_m$

et comme $x_m \leq x_0 \leq y_m$, on a

$$|f(y_m) - f(x_m) - (y_m - x_m)f'(x_0)| \leq (y_m - x_m)(\varepsilon'_m + \varepsilon_m)$$

$$\text{Donc} \quad |S_m - f'(x_0)| \leq \varepsilon_m + \varepsilon'_m$$

cad $S_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f'(x_0)$ ce qui est absurde.

Donc f'_m est pas dérivable en x_0 et on a le résultat.