

Ref: Gourdon; Analyse, p. 377-378.

Lemme de Gronwall :

Soient φ, ψ et $\gamma \leq$ sur $[a; b]$ et positives tq :

$$\forall t \in [a; b]; \quad \gamma(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) \gamma(s) ds.$$

$$\text{Alors } \forall t \in [a; b]; \quad \gamma(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) e^{\int_s^t \psi(u) du} ds.$$

Corollaire : Si $\varphi \equiv c = c^{ste}$ on a $\gamma(t) \leq c \exp(\int_a^t \psi(s) ds)$.
(s'obtient en calculant le résultat du LM de Gronwall).

Démon :

$$\text{Posons } v(t) = \int_a^t \psi(s) \gamma(s) ds.$$

$$\text{Alors } v'(t) \leq \psi(t) \varphi(t) + \psi(t) v(t).$$

$$\text{donc } v'(t) - \psi(t) v(t) \leq \psi(t) \varphi(t).$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \underbrace{v'(t) e^{-\int_a^t \psi(u) du} - \psi(t) v(t) e^{-\int_a^t \psi(u) du}}_{= (v(t) e^{-\int_a^t \psi(u) du})'} &\leq \psi(t) \varphi(t) e^{-\int_a^t \psi(u) du}. \\ &= (v(t) e^{-\int_a^t \psi(u) du})'. \end{aligned}$$

En remplaçant t par s et en intégrant entre a et t :

$$\int_a^t (v(s) e^{-\int_a^s \psi(u) du})' ds \leq \int_a^t \psi(s) \varphi(s) e^{-\int_a^s \psi(u) du} ds.$$

$$\begin{aligned} \text{donc } v(t) e^{-\int_a^t \psi(u) du} &\leq \int_a^t \psi(s) \varphi(s) e^{-\int_a^s \psi(u) du} ds \\ \text{car } \underbrace{v(a)}_{=0} e^{-\int_a^a \psi(u) du} &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi $v(t) = \int_a^t \varphi(s) \psi(s) e^{\int_s^t \psi(u) du} ds$.

en multipliant par $e^{\int_a^t \psi(u) du}$.

Ainsi: $y(t) \leq \varphi(t) + v(t)$.

$$\leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) e^{\int_s^t \psi(u) du} ds.$$

Application: $q: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$; C^2 , positive et croissante.

Il y a si y est sol^o. de (L): $y'' + q(t)y = 0$

alors y est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Demo: Soit y sol^o. de (L).

Alors $2y'y'' + 2y'q(t)y = 0$.

En intégrant on a:

$$y'^2(t) - y'(0)^2 + 2 \int_0^t y'(s)y(s)q(s) ds = 0.$$

$u = q(s)$. $u' = q'(s)$. $v' = 2y'(s)y(s)$ $v = y^2(s)$. par IPP:

$$y'^2(t) + q(t)y(t)^2 = \underbrace{y'(0)^2 + q(0)y(0)^2}_{=:K} + \int_0^t y(s)^2 q'(s) ds.$$

Donc $q(t)y(t)^2 \leq K + \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} q(s)y(s)^2 ds$.

Par le corollaire de Gronwall:

$$q(t)y(t)^2 \leq K e^{\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)} ds} = K e^{\ln(q(t)) - \ln(q(0))} = K \frac{q(t)}{q(0)}.$$

Donc $y(t)^2 \leq \frac{K}{q(0)} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$. d'où le résultat.