Ref : Gourdon ; Analyse, p. 321.

Proposition : minimum d'une norme :
$n\in\mathbb{N}^*$. on muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\|M\|_2 = \left(\sum_{i,j} m_{i,j}^2\right)^{1/2} = \left(Tr({}^tMM)\right)^{1/2}$.
le groupe des matrices orthogonales directes $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \det(M) = 1\}$ de norme minimal.

Démo :
$\|M\|_2^2 = tr({}^tMM)$. Il faut donc minimiser $f(M) = tr({}^tMM)$
sous la contrainte $g(M) = 0$ où $g(M) = \det(M) - 1$.
f et g sont $\mathcal{C}$ comme sommes et produits finis d'elt de M.
Ainsi $g^{-1}(\{0\}) = SL_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Donc le minimum de f sur $SL_n(\mathbb{R})$ est atteint
en un point $A \in SL_n(\mathbb{R})$. par le lemme suivant :

Lemme : E un ev. de dim finie.
La distance d de 0 à un fermé F de E est atteinte.
$\hookrightarrow$ pour la norme $\|\cdot\|$
En effet elle est atteinte sur $F \cap D(0, d+1)_{\|\cdot\|}$ étant compact.
($x \mapsto dist(0;x)$ est $\mathcal{C}$ de $\underbrace{F\cap\{x\in E ; \|x\| \leq d+1\}}_{\text{compact.}}$ ds $\mathbb{R}$).

De plus ; $\partial \det(M)\cdot H = tr({}^t com(M) \times H)$
donc $dg_A(H) = tr({}^t Com(A)H)$. donc dg_A non nul.
Donc d'après le thm des extrêma liés ; $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq
$$df_A = \lambda\, dg_A .$$
Et de plus ; $f(A+H) = tr({}^tAA) + tr({}^tAH) + tr({}^tHA) + tr({}^tHH)$
$= tr({}^tAA) + 2tr({}^tAH) + \|H\|_2^2$.

donc $df_A(H) = 2\,tr({}^tA H)$.

donc $2\,tr({}^tAH) = \lambda\, tr({}^t\underset{\substack{\shortparallel \\ com(A)}}{C}\, H)$. $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$.

Donc $2A = \lambda \underset{\substack{\shortparallel \\ com(A)}}{C}$ en utilisant $H = E_{ij}$ $i;j \in [\![1;n]\!]$.
Les ts coefs nuls sauf celui en $(i;j)$.

De plus, A inversible et $\det(A) = 1$ donc $A^{-1} = {}^t com(A)$.
donc $C = Com(A) = {}^t(A^{-1})$
$= ({}^tA)^{-1}$.

$({}^tA \times {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n = I_n$ donc $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$).

Donc $2A = \lambda({}^tA)^{-1}$ donc $2\,{}^tA A = \lambda I_n$.

donc $\det(2\,{}^tA A) = \det(\lambda I_n) \iff 2^n = \lambda^n$. $(\det({}^tA) = \det(A))$

et $\lambda > 0$ car $\lambda I_n = 2\,{}^tAA > 0$.

donc $\lambda = 2$.

donc ${}^tA A = I_n$. donc $A \in SO_n(\mathbb{R})$.

le min de f est donc atteint sur $SL_n(\mathbb{R})$ en $A \in SO_n(\mathbb{R})$.

Ce min vaut $tr({}^tA A) = tr(I_n) = n$.

Réciproquement $\forall M \in SO_n(\mathbb{R})$, $tr({}^tM M) = n$, d'où le résultat.