Ref : Gourdon, Analyse, p. 100.

Théorème : I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue.

Soit $$R(x) = \lim_{\substack{\ell \to 0 \\ \ell > 0}} \sup_{|h| \leq \ell} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

- si $\forall x \in \mathring{I}$; $R(x) \geq 0$; alors f est convexe.
- si $\forall x \in \mathring{I}$; $R(x) = 0$; alors f est affine.

Démo :

Lemme : $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe ssi $\forall [a;b] \subset I$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$;

$\varphi : \begin{cases} [a;b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + \mu x \end{cases}$ est bornée et atteint sa borne sup en a ou b.

- f convexe ssi $\forall x \in \mathring{I}$; $\forall \varepsilon > 0$; $\exists h \in]0;\varepsilon[$; $f(x) \leq \frac{1}{2}(f(x+h) + f(x-h))$:

$\Rightarrow$: f convexe alors $f\left(\frac{x+h}{2} + \frac{x-h}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x+h) + \frac{1}{2} f(x-h)$.

$\Leftarrow$: Soit $[a;b] \subset I$; $\mu \in \mathbb{R}$; $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + \mu x$ est $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}$ de f.

Donc φ borné et atteint ses bornes car φ $\mathcal{C}$ sur I compact.

Soit M le maximum de φ sur I, et $\Gamma = \varphi^{-1}(\{M\})$ non vide.

Soit $c = \inf(\Gamma)$. Comme φ $\mathcal{C}$ alors Γ est fermé donc

$c \in \Gamma$ et $\varphi(c) = M$. Si $a < c < b$; par hypothèse :

$\exists h > 0$; $a < c-h < c < c+h < b$ et $\varphi(c) \leq \frac{1}{2}(\varphi(c+h) + \varphi(c-h))$.

or $\varphi(c) = \sup_{[a;b]} \varphi$ donc $\varphi(c+h) = \varphi(c-h) = M$. Absurde car $c-h < c$ et $c = \inf(\Gamma)$.

Par le lemme on a donc f convexe.

- $\forall \alpha > 0$; soit $f_\alpha : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + \alpha x^2 \end{cases}$.

on a : $\forall x \in I$; $\forall h > 0$;

$$\frac{f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h) - 2f_\alpha(x)}{h^2} = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + 2\alpha.$$

or $R(x) \geq 0$ par $x \in \mathring{I}$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0$.

d'où ~~$f_\alpha(x+h) + f$~~
$\forall x \in \mathring{I}$.
$\forall \varepsilon > 0$; $\exists h \in]0; \varepsilon[$; $\dfrac{f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h) - 2f_\alpha(x)}{h^2} \geq \alpha > 0$.

Donc $\forall \varepsilon > 0$; $\forall x \in \mathring{I}$; $\exists h \in]0; \varepsilon[$; $f_\alpha(x) \leq \frac{1}{2}\left(f_\alpha(x+h) + f_\alpha(x-h)\right)$.

Donc avec le point précédent f_α convexe et donc qd $\alpha \to 0^+$;
$f_\alpha \xrightarrow{cvs} f$ donc f convexe.

- Si f vérifie $R(x) = 0$; déjà $R(x) \geq 0$ donc f convexe.

De plus $-f$ vérifie aussi $R(x) = 0$.
Donc $-f$ est convexe et donc f concave.

Or f convexe et concave donc f est affine.

→ Application : Thm Cantor sur les séries trigo.