Ref : Gourdon ; Analyse ; p. 114.

Définition : Fonctions à variations bornées.

Pour tout $[a;b] \subset \mathbb{R}$; sub$([a;b])$ est l'ensemble des subdivisions de $[a;b]$.
$\forall \sigma \in \mathrm{Sub}([a;b])$; $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$;

on définit $\mathrm{Var}_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$.

si $\exists M > 0$ tq $\mathrm{Var}_\sigma(f) < M$ $\forall \sigma \in \mathrm{sub}([a;b])$ alors

f est à variations bornées et on note $f \in BV([a;b])$.

on définit alors : $V_a^b f = \sup_{\sigma \in \mathrm{sub}([a;b])} \mathrm{Var}_\sigma(f)$.

Proposition :

1) Soit $J = [c;d] \subset I = [a;b]$ alors si $f \in BV([a;b])$; $f|_J \in BV(J)$.

2) soit $a < b < c$ et $f \in BV([a;c])$.

Alors $V_a^b f + V_b^c f = V_a^c f$.

3) $f \in BV(I) \iff \exists g ; h$ croissantes sur I tq $f = g - h$.

Démo :

1) Soit $\sigma \in \mathrm{sub}(J)$; $\sigma : c = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} = d$.
et dans $\mathrm{Sub}(I)$.

Alors $\sigma' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

or $\mathrm{Var}_\sigma(f|_J) = \sum_{i=1}^{n-2} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \mathrm{Var}_{\sigma'}(f)$.

$< M$ car $f \in BV(I)$.

donc $\forall \sigma$; $\mathrm{Var}_\sigma(f|_J) < M$.

d'où $f|_J \in BV(J)$.

2) Soient $\sigma_1 : a = x_0 < \cdots < x_p = b$ et $\sigma_2 : b = y_0 < \cdots < y_q = c$

des subdivisions de $[a;b]$ et $[b;c]$.

$\sigma : a = x_0 < \cdots < x_p = y_0 < \cdots < y_q = c$ est subdivision de $[a;c]$.

on a : $Var_{\sigma_1}(f) + Var_{\sigma_2}(f) = Var_{\sigma}(f) \leq V_a^c f \quad \forall \sigma_1; \sigma_2$.

donc $V_a^b f + V_b^c f \leq V_a^c f$.

Réciproquement si $\sigma \in sub([a;c])$ on peut ajouter le point b à cette subdivision pour former $\sigma' \in sub([a;c])$.

Par I.T : $Var_{\sigma}(f) \leq Var_{\sigma'}(f)$.

on note $\sigma' : a = x_0 < \cdots < x_p = b = y_0 < \cdots < y_q = c$.

et on note σ_1 et σ_2 les sub. de $[a;b]$ et $[b;c]$.

$$Var_{\sigma}(f) \leq Var_{\sigma'}(f) = Var_{\sigma_1}(f) + Var_{\sigma_2}(f) \leq V_a^b f + V_b^c f.$$

cela étant vrai $\forall \sigma \in sub([a;c])$ alors : $V_a^c f \leq V_a^b f + V_b^c f$.

donc $V_a^b f + V_b^c f = V_a^c f$.

3) $\Leftarrow$ | Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fct $\nearrow$. et $\sigma \in sub([a;b])$.

$$Var_{\sigma}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(b) - f(a).$$

donc $f \in BV([a;b])$.

En remarquant que la différence de deux fct à variation bornée est à variation bornée alors si $g; h$ fct $\nearrow$; alors $g - h \in BV([a;b])$.

$\Rightarrow$ | Soit $f \in BV(I)$; on pose $g : x \in I \mapsto V_a^x f$. g est alors $\nearrow$ (avec 2)).

Soit $h = g - f$; $\forall x < y$: $h(y) - h(x) = V_x^y f - (f(y) - f(x)) \geq 0$ car $|f(y) - f(x)| \leq V_x^y f$.

car $\sigma : x < y$ est une sub de $[x;y]$.

donc $h \nearrow$ et $g \nearrow$ et $f = g - h$.

d'où l'équivalence.