

Ref: Gourdon; Analyse, 2^e édition; p. 330.

Théorème: (Fonctions strictement monotones).

E espace euclidien de dim finie. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ norme euclidienne associées.

$f: E \rightarrow E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tq:

$$\forall (u, v) \in E^2; \quad \langle f(u) - f(v); u - v \rangle \geq k \|u - v\|^2. \quad (*)$$

a) $f \in \mathcal{C}^1(E)$. Alors f vérifie (*)ssi $\forall x \in E; \forall h \in E; \langle df_x(h); h \rangle \geq k \|h\|^2$.

b) $f \in \mathcal{C}^1(E)$, strictement monotone; alors f est un $\mathcal{C}^1$ -difféo de E sur E .

Démon:

a) $\Rightarrow$: si f vérifie (*) alors $\forall x \in E; \forall h \in E; \forall t \in \mathbb{R}^*$;

$$\langle f(x+th) - f(x); th \rangle \geq k t^2 \|h\|^2.$$

$$\text{donc } \left\langle \frac{f(x+th) - f(x)}{t}; h \right\rangle \geq k \|h\|^2.$$

en faisant tendre t vers 0 on a: $\langle df_x(h); h \rangle \geq k \|h\|^2$.

$\Leftarrow$: si $\forall x; h \in E; \langle df_x(h); h \rangle \geq k \|h\|^2$.

soit $x, h \in E$:

soit $\varphi:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$t \mapsto \langle f(x+th); h \rangle.$$

$$\text{et } \forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \langle df_{x+th}(h); h \rangle \geq k \|h\|^2.$$

donc $\varphi(1) - \varphi(0) \geq k \|h\|^2$; i.e. $\langle f(x+h) - f(x); h \rangle \geq k \|h\|^2$.

$\rightarrow$ par TAF et IAF.

d'où (*).
(on peut $\forall h \in E$
prendre $h = x - x$)

b) Par le thm d'inversion globale il faut mg:

i) $\forall x \in E; df_x$ inversible.

ii) f bijective de E sur E .

i) $x \in E$.

on a $\langle df_x(h), h \rangle \geq h \|h\|^2 \quad \forall h \in E$ car $f \in C^1$ et vérifie (*).

On a donc $\forall h \neq 0; df_x(h) \neq 0$ donc df_x injective
donc bijective (car c'est un endomorphisme de dim finie) donc
 df_x inversible.

ii) La relation (*) entraîne l'injectivité.

Montrons que f est surjective:

E est connexe donc on doit moy $f(E)$ est un ouvert fermé de E .

Comme $\forall x \in E; df_x$ est inversible Alors f est ouverte donc E étant
ouvert de E donc $f(E)$ ouvert de E .

Pour montrer que $f(E)$ est fermé nous allons voir que $f(E)$ est
complet (et complet $\Rightarrow$ fermé).

Déjà par inégalité de Schwarz: $|\langle f(x) - f(y), x - y \rangle| \leq \|x - y\| \cdot \|f(x) - f(y)\|$.

donc avec (*) on a: $h \|x - y\|^2 \leq \|x - y\| \cdot \|f(x) - f(y)\|$.

donc $\|x - y\| \leq \frac{\|f(x) - f(y)\|}{h} \quad (**).$

Soit $(f(x_n))_n$ une suite de Cauchy de $f(E)$.

D'après (**), $\|x_p - x_q\| \leq \frac{\|f(x_p) - f(x_q)\|}{h} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$.

donc $(x_n)_n$ suite de Cauchy de E ; donc elle converge
vers $x \in E$.
 $\hookrightarrow E$ complet car c'est un
 $\mathbb{R}$ -ev et $\mathbb{R}$ complet.

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ par $\subseteq$.

donc $(f(x_n))_n$ cv dans $f(E)$ car $f(x) \in f(E)$.

d'où $f(E)$ complet donc fermé donc f bij.

Donc f C^1 -difféo.