THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS

Lemme : Il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui approche uniformément $|\cdot|$ sur $[-1,1]$.

Soit (X,d) un espace métrique compact contenant au moins 2 éléments.

Thm (de STONE-WEIERSTRASS) : Si H est une sous-algèbre séparante et unitaire de $C(X,\mathbb{R})$ alors H est dense dans $C(X,\mathbb{R})$.

Preuve du Thm : Soit $H \subseteq C(X,\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses.

- Pour tout $(f,g)\in\overline{H}^2$, $\min(f,g)\in\overline{H}$ et $\max(f,g)\in\overline{H}$:

Soit $h\in\overline{H}\setminus\{0\}$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par le lemme. Comme H est unitaire, $\overline{H}$ aussi, donc $\mathbb{R}\subseteq\overline{H}$, et donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n\left(\frac{h}{\|h\|_\infty}\right)\in\overline{H}$, et donc $|h| = \|h\|_\infty \left|\frac{h}{\|h\|_\infty}\right| \in \overline{H}$. Il suffit pour conclure de remarquer que :

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \qquad \text{et} \qquad \min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

- $\forall (x_1,x_2)\in X^2$, $\forall(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$, $x_1\neq x_2 \Rightarrow \exists h\in H : h(x_1)=\alpha_1$ et $h(x_2)=\alpha_2$.

Soient $(x_1,x_2)\in X^2$ tel que $x_1\neq x_2$ et $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$. Comme H est séparante, il existe $h_0\in H$ telle que $h_0(x_1)\neq h_0(x_2)$. De là, $\begin{cases}\lambda h_0(x_1)+\mu=\alpha_1\\ \lambda h_0(x_2)+\mu=\alpha_2\end{cases}$ est un système de CRAMER d'inconnues λ et μ, et admet donc une unique solution (λ_0,μ_0). Posons $h=\lambda_0 h_0+\mu_0$. Comme H est une algèbre unitaire, $h\in H$, et h vérifie bien $h(x_1)=\alpha_1$ et $h(x_2)=\alpha_2$.

- H est dense dans $C(X,\mathbb{R})$:

Soient $f\in C(X,\mathbb{R})$ et $\varepsilon>0$. Soit $(x,y)\in X^2$ tel que $x\neq y$. D'après le point précédent, il existe $u_y\in H$ telle que $u_y(x)=f(x)$ et $u_y(y)=f(y)$. Posons alors $O_y = \{x'\in X \mid u_y(x') > f(x')-\varepsilon\} = (u_y-f)^{-1}(]-\varepsilon,+\infty[)$. Comme u_y et f sont continues, O_y est ouvert, et $u_y(x)=f(x)>f(x)-\varepsilon$ et $u_y(y)=f(y)>f(y)-\varepsilon$, donc $(x,y)\in O_y^2$. De là, $X=\bigcup_{y\in X\setminus\{x\}} O_y$, mais X est compact donc il existe $(y_1,\dots,y_r)\in(X\setminus\{x\})^r$ tel que $X = O_{y_1}\cup\dots\cup O_{y_r}$.

Posons $v_x = \max(u_{y_1},\dots,u_{y_r})\in\overline{H}$. On a alors $v_x(x) = \max(u_{y_1}(x),\dots,u_{y_r}(x)) = \max(f(x),\dots,f(x)) = f(x)$, et $v_x(y) = \max(u_{y_1}(y),\dots,u_{y_r}(y)) > f(y)-\varepsilon$. Posons $\Omega_x = \{x'\in X \mid v_x(x') < f(x')+\varepsilon\} = (v_x-f)^{-1}(]-\infty,\varepsilon[)$. Par continuité de $v_x - f$, Ω_x est ouvert, et de même que précédemment, pour tout $x\in X$, $x\in\Omega_x$, donc $X=\bigcup_{x\in X}\Omega_x$, mais X est compact donc il existe $(x_1,\dots,x_t)\in X^t$ tel que $X=\Omega_{x_1}\cup\dots\cup\Omega_{x_t}$.

Posons finalement $v=\min(v_{x_1},\dots,v_{x_t})\in\overline{H}$. Pour tout $x\in X$, $f(x)-\varepsilon < v(x) < f(x)+\varepsilon$, donc $\|f-v\|_\infty<\varepsilon$. ■

Preuve du Lemme : Soit $(P_n)_n$ la suite définie par $P_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_{n+1} : x\longmapsto P_n(x)+\frac{1}{2}(x^2-P_n(x)^2)$.

Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[-1,1]$, $0\leq P_n(x)\leq P_{n+1}(x)\leq|x|$:

- $n=0$: Pour tout $x\in[-1,1]$, $0\leq P_0(x)\leq P_1(x)=\frac{1}{2}x^2 \leq |x|$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$ rendant l'hypothèse vraie. Soit $x\in[-1,1]$. Comme $0\leq P_{n+1}(x)\leq|x|$, on a $P_{n+1}(x)^2\leq x^2$, et donc $P_{n+2}(x)-P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x^2-P_{n+1}(x)^2)\geq 0$. Ensuite,

$$\begin{aligned}P_{n+2}(x) &= P_{n+1}(x)+\frac{1}{2}(x^2-P_{n+1}(x)^2) = |x|-|x|+P_{n+1}(x)+\frac{1}{2}(|x|-P_{n+1}(x))(|x|+P_{n+1}(x))\\ &= |x| + \underbrace{(|x|-P_{n+1}(x))}_{\geq 0}\underbrace{\Big[-1+\underbrace{\tfrac{1}{2}(|x|+\underbrace{P_{n+1}(x)}_{\leq|x|})}_{\leq |x|\leq 1}\Big]}_{\leq 0} \leq |x|\end{aligned}$$

D'après le théorème de la limite monotone, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction P sur $[-1,1]$. En faisant tendre $n \to +\infty$ dans $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2)$, on montre que $P(x) = P(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P(x)^2)$, mais $0 \leq P(x) \leq |x|$ donc $P(x) = |x|$.

Comme $P = |\cdot|$ est continue et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante sur le compact $[-1,1]$, un théorème de Dini montre que la convergence est uniforme. ■

Annexe 1 : Théorème de Dini

Soient $D \subseteq \mathbb{R}^N$ compact et $(u_n)_n \in C^0(D,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ croissante (point par point) qui converge simplement vers $u \in C^0(D,\mathbb{R})$. Alors $\|u_n - u\|_\infty \longrightarrow 0$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\Omega_n := \{x \in D \mid u_n(x) - u(x) < \varepsilon\} = (u_n - u)^{-1}(]-\infty, \varepsilon[)$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - u$ est continue, $(\Omega_n)_n$ est une suite d'ouverts, qui plus est croissante par croissance de $(u_n)_n$. Comme $(u_n)_n$ converge simplement vers u, on a $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$, mais D est compact, donc on peut extraire de $(\Omega_n)_n$ un sous-recouvrement fini de D ; par croissance de $(\Omega_n)_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $D = \Omega_{n_0}$. De là, $\forall x \in D$, $u_{n_0}(x) - u(x) < \varepsilon$, mais $(u_n)_n$ tend simplement en croissant vers u sur D, donc $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in D$, $|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$, i.e. $\|u_n - u\|_\infty < \varepsilon$. ■

Annexe 2 : Exemples d'algèbres unitaires séparantes

- $C^k(X,\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- L'ensemble des fonctions polynomiales
- L'espace des fonctions lipschitziennes sur X
- Si $X \subseteq \mathbb{R}^d$, alors $H = \{x \mapsto P(x_1,\dots,x_d) \ : \ P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_d]\}$

Annexe 3 : Version complexe du théorème de Stone-Weierstrass (qui peut être présentée à la place du lemme)

Si H est une sous-algèbre séparante et unitaire de $C(X,\mathbb{C})$ stable par conjugaison, alors H est dense dans $C(X,\mathbb{C})$.

Preuve : Posons $H^{\mathbb{R}} = \{h \in H \mid h(X) \subseteq \mathbb{R}\}$: c'est une sous-algèbre de $C(X,\mathbb{R})$, unitaire et séparante. En effet soit $(x,y) \in X^2$ tel que $x \neq y$. Il existe $h_0 \in H$ tel que $h_0(x) \neq h_0(y)$, donc $\mathrm{Re}(h_0(x)) \neq \mathrm{Re}(h_0(y))$ ou $\mathrm{Im}(h_0(x)) \neq \mathrm{Im}(h_0(y))$. Dans le premier cas (le deuxième est identique), remarquons que $\mathrm{Re} \circ h_0 = \frac{h_0 + \overline{h_0}}{2} \in H$, et $\mathrm{Re} \circ h_0(X) \subseteq \mathbb{R}$ donc $\mathrm{Re} \circ h_0 \in H^{\mathbb{R}}$, CQFD. D'après le théorème de Stone-Weierstrass réel, $H^{\mathbb{R}}$ est dense dans $C(X,\mathbb{R})$. Remarquons enfin que $C(X,\mathbb{C}) = C(X,\mathbb{R}) + iC(X,\mathbb{R})$ et $H = H^{\mathbb{R}} + iH^{\mathbb{R}}$ pour conclure que H est dense dans $C(X,\mathbb{C})$. ■