Bernis p.253

FORMULE SOMMATOIRE DE POISSON — ÉCHANTILLONNAGE DE SHANNON —

241
246
250

Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-2i\pi t x}\, dt$.

Formule de POISSON : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n+t) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{2i\pi n t} =: \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, e^{2i\pi n t}$.

Critère et formule de restitution de SHANNON : Supposons qu'il existe $F>0$ telle que le support de $\hat{f}$ est contenu dans $[-F,F]$. Si $2F \leq 1$ (critère de SHANNON), alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, \mathrm{sinc}((n-t)\pi)$

où $\mathrm{sinc} : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Formule de POISSON : ▸ Soit $K \subset \mathbb{R}$ compact. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset [-N,N]$. Comme $f \in S(\mathbb{R})$, il existe $M>0$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq \frac{M}{1+t^2}$. Pour tous $t \in K$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| > N$, $|f(t+n)| \leq \frac{M}{1+(t+n)^2} \leq \frac{M}{(|n|-N)^2}$ (en effet, $t \in K$ donc $-N \leq t \leq N$, i.e. $t+N \geq 0$ et $t-N \leq 0$. De là, si $n > N$, alors $(t+n)^2 - (|n|-N)^2 = (t+n+|n|-N)(t+n-|n|+N) = \underbrace{(t+2n-N)}_{\geq 0}\underbrace{(t+N)}_{\geq 0} \geq 0$, et si $n < -N$, alors $(t+n)^2 - (|n|-N)^2 = (t+n+|n|-N)(t+n-|n|+N) = \underbrace{(t-N)}_{\leq 0}\underbrace{(t+2n-N)}_{\leq 0} \geq 0$, donc $1+(t+n)^2 \geq (t+n)^2 \geq (|n|-N)^2$.) Ainsi, $\|f(\cdot+n)\|_\infty \leq \frac{M}{(|n|-N)^2}$. Or $\sum_{|n|>N} \frac{M}{(|n|-N)^2}$ converge, donc $\sum_n f(n+\cdot)$ converge normalement sur K. Comme $f' \in S(\mathbb{R})$, le même raisonnement montre que $\sum_n f'(n+\cdot)$ converge normalement sur K.

▸ Posons $g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+\cdot)$. Par convergence normale, donc uniforme de $\sum_n f'(n+\cdot)$ sur tout compact, g est C^1 (car $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f'(n+\cdot)$ est continue) et $g' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'(n+\cdot)$. Par le changement de variable $m = n+1$, on montre que g est 1-périodique.

▸ Soit $k \in \mathbb{Z}$. Par convergence normale, donc uniforme, de $\sum_n f(n+\cdot)$ sur $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$:

$$c_k(g) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t)\, e^{-2ik\pi t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(n+t)\, e^{-2ik\pi t}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(u)\, e^{-2i\pi k u}\, du \quad (u = t+n)$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(t)\, e^{-2i\pi k t}\, dt = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} f(t)\, e^{-2i\pi k t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi k t}\, dt = \hat{f}(k).$$

Comme g est C^1 et 1-périodique, d'après le théorème de DIRICHLET, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\, e^{2i\pi n t}$, i.e.

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\, e^{2i\pi n t}.}$$

■

Critère et formule de restitution de SHANNON : Comme $f \in S(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ donc d'après la formule sommatoire de POISSON, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n+t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\hat{f}}(n)\, e^{2i\pi n t}$. D'après la formule d'inversion de FOURIER dans la classe de SCHWARTZ, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{\hat{f}}(n) = f(-n)$. Comme $\hat{f}$ est nulle en dehors de $[-F,F]$, et que $2F \leq 1$, $\hat{f}$ est nulle en dehors de $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, et la formule sommatoire de POISSON ci-dessus devient :

$$\hat{f} = \hat{f}\, \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n+\cdot) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n)\, e^{2i\pi n \cdot} = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, e^{-2i\pi n \cdot}$$

D'après la formule d'inversion de FOURIER dans la classe de SCHWARTZ, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\, e^{2i\pi x t}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n)\, e^{-2i\pi n x}\, e^{2i\pi x t}\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, e^{2i(t-n)\pi x}\, dx$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i(t-n)\pi x}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, \mathrm{sinc}\big((t-n)\pi\big)$$

($*$: Comme $\sum_n f(n+\cdot)$ converge normalement, elle converge absolument, mais $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(n)| = \sup_{x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} |f(n) e^{2i(t-n)\pi x}|$, donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_n f(n)\, e^{2i(t-n)\pi \cdot}$ converge normalement, donc uniformément sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et on peut permuter les symboles.) ■

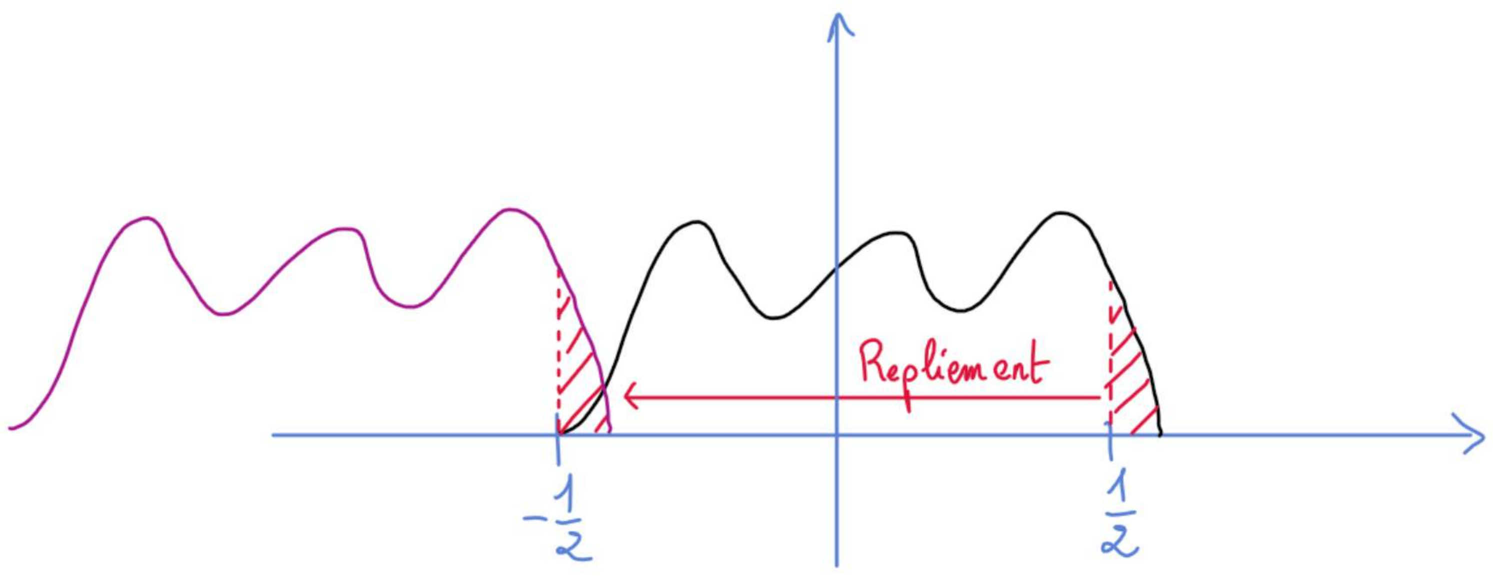
COMMENTAIRES : (voir Bernis pour plus de détails, ses commentaires sur le développement sont très intéressants.) :

- Dans le développement, on dit souvent "$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \cdots$ converge…" : attention au sens de ce symbole. On définit la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ comme étant la (vraie) série $u_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n + u_{-n}$. C'est au sens de cette définition que l'on parle de convergences dans ce développement. La subtilité est un peu cachée sous le tapis, mais il faut absolument en avoir conscience et savoir où et comment elle apparaît et se règle dans la démonstration.

- De manière plus générale, le critère de SHANNON dit que si on a un signal admettant une fréquence maximale f_{max}, alors on peut échantillonner celui-ci sans perte tant que la fréquence d'échantillonnage $f_{éch}$ vérifie $f_{éch} \geq 2 f_{max}$. On peut se ramener à $f_{éch} = 1$ par une dilatation de la variable temporelle.

- Échantillonner avec une fréquence de 1, ça revient à se donner $f \times Ш_1$ où $Ш_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$ est le peigne de DIRAC de pas 1, qui vaut 1 sur $\mathbb{Z}$, et 0 ailleurs.

- Que se passe-t-il si la fréquence d'échantillonnage est trop faible, i.e. si $2F > 1$? On observe un phénomène appelé repliement de spectre : si le spectre de f contient des fréquences trop élevées, celles-ci se "replieront" par périodification de $\hat{f}$, et se manifesteront sous forme de basses fréquences.



- Le commentaire du rapport 2022 sur la leçon 250 suggère de bien avoir en tête que ce théorème traduit une isométrie entre deux espaces de HILBERT, à savoir l'isométrie $\{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{supp}(\hat{u}) \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \longmapsto (f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$. Pour plus de détails, voir le développement 176 de agreg-maths.