u diagonalisable $\Leftrightarrow$ e^u diagonalisable.

Ref: Rombaldi; Algèbre; p. 634.

Théorème :

Si $u = d+v$ est la décomposition de Dunford de u, alors celle de e^u est $e^u = e^d + e^d(e^v - Id)$ où e^d diagonalisable et $e^d(e^v - Id)$ nilpotent.

Corollaire :

u diagonalisable ssi e^u diagonalisable.

Preuve :

Théorème :

on a $e^u = e^{d+v} = e^d e^v$ car d et v commutent.

$= e^d \sum_{k=0}^{q-1} \frac{v^k}{k!}$ où v est d'indice de nilpotence q.

$= e^d \left(Id + v \sum_{k=1}^{q-1} \frac{v^{k-1}}{k!} \right) = e^d + ve^d \sum_{k=1}^{q-1} \frac{v^{k-1}}{k!}$.

car v et e^d commutent car v et d commutent.

$e^d(e^v - Id) = v e^d \sum_{k=1}^{q-1} \frac{v^{k-1}}{k!} =: vw$.

v et w commutent (car v et d), $(v.w)^q = v^q w^q = 0$, donc vw est nilpotent et e^d diagonalisable car d l'est.

on a ainsi une décomposition de dunford de e^u et la décomposition est unique donc $e^u = e^d + e^d(e^v - Id)$.

Corollaire :

on a $u = d+v$ (décomp. de Dunford).

par unicité de cette décompo. on a u diagonalisable ssi $v = 0$.

Si u diagonalisable, $e^d(e^v - Id) = 0$ est la partie nilpotente de la décomp. de dunford de e^u, qui est donc diagonalisable.

Réciproquement :

e^u diago. ssi $e^d(e^v - Id) = 0$; donc $e^v = Id$ car e^d inversible.

or $e^v = \sum_{k=0}^{q} \frac{v^k}{k!}$ où q indice de nilpotence de v.

$$e^v = Id \iff \sum_{k=1}^{q} \frac{v^k}{k!} = 0.$$

c'est-à-dire que $P(X) = \sum_{k=1}^{q} \frac{X^k}{k!}$ est annulateur de v

et X^q est le pol. minimal de v donc $X^q \mid P(X)$ donc $q = 1$

donc $v^1 = v = 0$ donc u diagonalisable.