DÉTERMINANT DE GRAM & INÉGALITÉS DE HADAMARD

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien (réel ou complexe). On note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Thm 1 : Soit $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ libre, posons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $x \in E$, $d(x,F)^2 = \dfrac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$, où $G(a_1, \dots, a_r) = \det\left((\langle a_i | a_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq r} \right)$ (on l'appelle déterminant de Gram de $(a_1, \dots, a_r)$).

Thm 2 (inégalités d'Hadamard) :

1▸ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $G(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$

2▸ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$, $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|_2$

avec égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale.

Preuve de Thm 1 : Soit $x \in E$. Notons y le projeté orthogonal de x sur F, de sorte que $d(x,F) = \|x-y\|$. D'après le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x-y\|^2$. Posons $\Gamma = (\langle e_i | e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$G(e_1, \dots, e_n, x) = \begin{vmatrix} & & & \langle e_1 | x \rangle \\ & \Gamma & & \vdots \\ & & & \langle e_n | x \rangle \\ \langle x | e_1 \rangle & \cdots & \langle x | e_n \rangle & \langle x | x \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \langle e_1 | y \rangle \\ & \Gamma & & \vdots \\ & & & \langle e_n | y \rangle \\ \langle y | e_1 \rangle & \cdots & \langle y | e_n \rangle & \|y\|^2 + \|x-y\|^2 \end{vmatrix} \quad (\text{car } x-y \in F^\perp)$$

$$= \begin{vmatrix} & & & \langle e_1 | y \rangle \\ & \Gamma & & \vdots \\ & & & \langle e_n | y \rangle \\ \langle y | e_1 \rangle & \cdots & \langle y | e_n \rangle & \|y\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & \Gamma & & \vdots \\ & & & 0 \\ \langle y | e_1 \rangle & \cdots & \langle y | e_n \rangle & \|x-y\|^2 \end{vmatrix} \quad (\text{car le déterminant est linéaire par rapport à la dernière colonne})$$

$$= G(e_1, \dots, e_n, y) + \|x-y\|^2 \, G(e_1, \dots, e_n).$$

Or $y \in F$ donc $(e_1, \dots, e_n, y)$ est liée, donc par linéarité du produit scalaire, $G(e_1, \dots, e_n, y) = 0$. Par ailleurs, si $G(e_1, \dots, e_n) = 0$, alors les colonnes de Γ sont liées, i.e. il existe $k \in [\![1,n]\!]$ et $(\lambda_\ell)_{\ell \neq k} \in \mathbb{K}^{n-1}$ tels que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\langle e_i | e_k \rangle = \sum_{\ell \neq k} \lambda_\ell \langle e_i | e_\ell \rangle = \langle e_i | \sum_{\ell \neq k} \lambda_\ell e_\ell \rangle$. De là, $e_k - \sum_{\ell \neq k} \lambda_\ell e_\ell \in F \cap F^\perp = \{0\}$, contredisant la liberté de $(e_1, \dots, e_n)$. Finalement, $d(x,F)^2 = \|x-y\|^2 = \dfrac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$. ■

Preuve de Thm 2 : 1▸ On procède par récurrence sur $n \geq 1$:

▹ Soit $x_1 \in E$. On a $G(x_1) = |\langle x_1 | x_1 \rangle| = \|x_1\|^2$.

▹ Soit $n \geq 1$, supposons le résultat démontré pour les familles de n vecteurs. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$. Si elle est liée, alors il n'y a rien à faire : supposons-la libre. Posons $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et notons y le projeté orthogonal de x_{n+1} sur F. D'après Thm 1,

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) = G(x_1, \dots, x_n) \|x_{n+1} - y\|^2 \overset{(1)}{\leq} \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \times \|x_{n+1} - y\|^2 \overset{\text{Pythagore}}{=} \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \times \left(\|x_{n+1}\|^2 - \|y\|^2 \right) \overset{(2)}{\leq} \prod_{k=1}^{n+1} \|x_k\|^2$$

avec (1) par hypothèse de récurrence, qui est une égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale, et (2) est une égalité si et seulement si $y = 0$, i.e. $x_{n+1} \in F^\perp$, ce qui démontre l'hérédité de la récurrence. □

2 ▸ Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$, notons M la matrice dont les colonnes sont $x_1, \dots, x_n$. Pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique, d'après 1 ▸ :

$$|\det(x_1, \dots, x_n)|^2 = |\det(M)|^2 = |\det({}^t\overline{M} M)| = \det\left((\overline{x_j} \cdot x_k)_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \right) = G(x_1, \dots, x_n) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|_2^2. \quad \blacksquare$$

Commentaires

▸ Interprétation géométrique de la deuxième inégalité de Hadamard : rappelons que $|\det(x_1, \dots, x_n)|$ correspond au volume du parallélotope engendré par $x_1, \dots, x_n$. Ainsi, le volume maximal est atteint quand les angles sont droits, lorsque les longueurs des arêtes sont fixées.