Gourdon Analyse 3 p315

ÉTUDE DE Γ SUR $]0,+\infty[$

228, 229, 236, 239, 265

Pour $x>0$ et $y>0$, on définit $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ et $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$.

1▸ Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$

2▸ Γ et $\ln(\Gamma)$ sont convexes sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3▸ $\forall x>0,\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

4▸ Allure du graphe

5▸ $\forall x>0,\ \forall y>0,\ B(x,y)=B(y,x)$

$B(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}B(x,y)$

6▸ $\forall x>0,\ \Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ (formule d'EULER-GAUSS).

Rq : ce qui est en VERT est à survoler à l'oral, sans écrire au tableau.

1▸ Pour $x>0$ et $t>0$, posons $f(x,t)=t^{x-1}e^{-t}$. Comme $f(x,t)\underset{t\to0^+}{\sim}t^{x-1}=\frac{1}{t^{1-x}}$ et $1-x<1$, $f(x,\cdot)\in L^1(]0,1])$, et comme $f(x,t)=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $f(x,\cdot)\in L^1([1,+\infty[)$. Ainsi, $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x>0$. Soit $[a,b]\in\mathbb{R}^{+*}$, soit $x\in[a,b]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)=\ln(t)^n t^{x-1}e^{-t}$. Si $0<t<1$, alors $\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right|\leqslant|\ln(t)|^p t^{a-1}=\underset{t\to0^+}{o}(t^{\frac{a}{2}-1})$ (croissance comparée), et si $t\geqslant1$, alors $\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right|\leqslant\ln(t)^p t^{b-1}e^{-t}=\underset{t\to+\infty}{O}(e^{-t/2})$. Ainsi $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est majorée par une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$ indépendante de $x\in[a,b]$, pour tout $t>0$, $f(\cdot,t)$ est de classe C^n, donc d'après les théorèmes de transfert de régularité sous le signe intégrale, Γ est de classe C^n, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi, Γ est lisse sur $[a,b]$, quelque soit $[a,b]\subseteq\mathbb{R}^{+*}$. Finalement, $\Gamma\in C^\infty(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$.

(Rq : 2 possibilités de rédaction plus soignée : par récurrence sur n, ou par holomorphie sur le demi-plan. Il ne faut pas passer trop de temps sur ce point (2 min max)).

2▸ Γ est C^2 et $\forall x>0$, $\Gamma''(x)=\int_0^{+\infty}\underbrace{\ln(t)^2t^{x-1}e^{-t}}_{\geqslant0}dt\geqslant0$ donc Γ est convexe.

Posons $g=\ln\circ\Gamma$: elle est C^2, et $g''=\dfrac{\Gamma''\Gamma-\Gamma'^2}{\Gamma^2}$. Or pour tout $x>0$,

$$\Gamma'(x)^2=\left(\int_0^{+\infty}\ln(t)\,t^{x-1}e^{-t}dt\right)^2=\left(\int_0^{+\infty}\underbrace{\left[t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}\right]}_{\in L^2}\cdot\underbrace{\left[t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}\ln(t)\right]}_{\in L^2}dt\right)^2$$

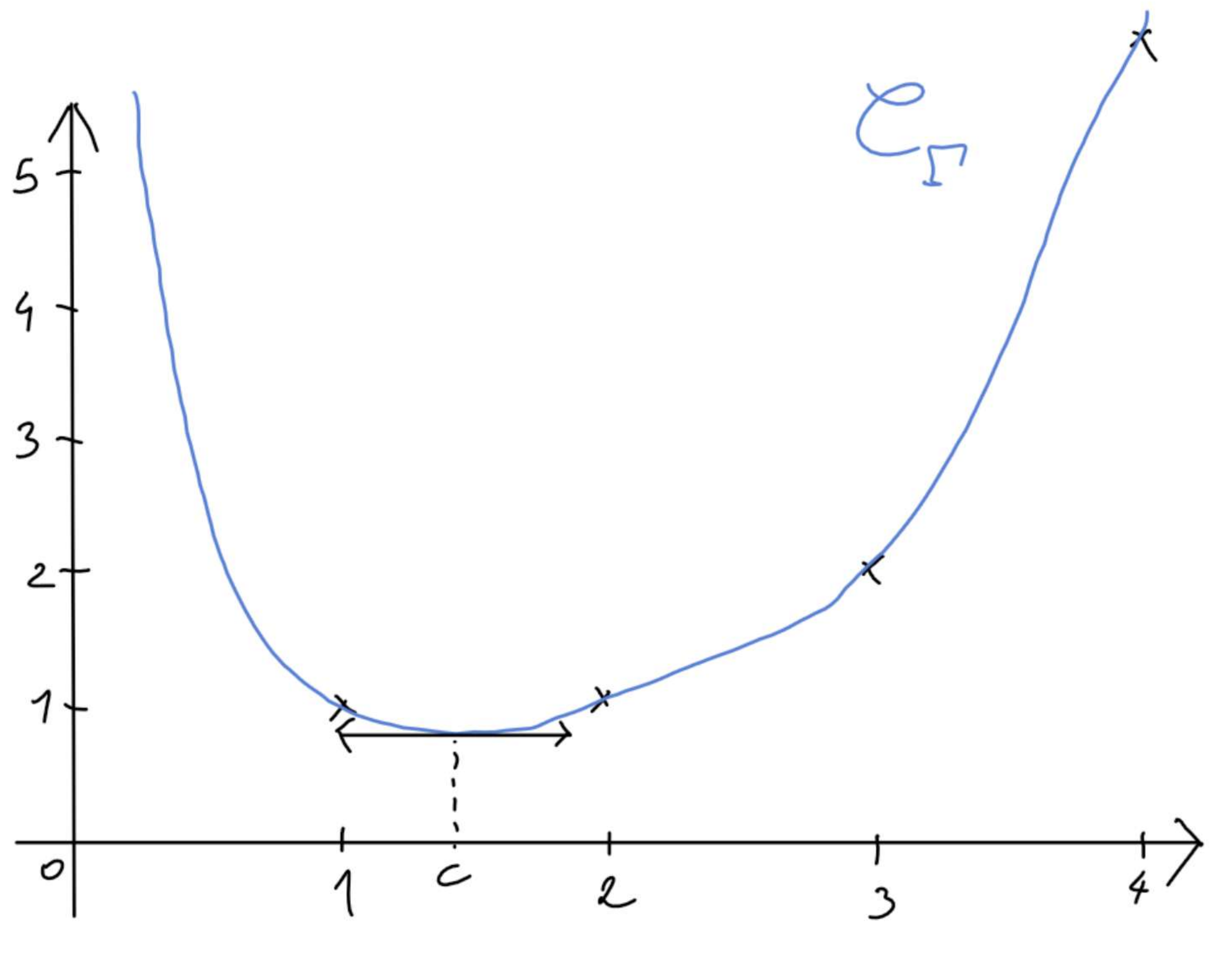
$$\overset{\text{C.S.}}{\leqslant}\left(\int_0^{+\infty}\left[t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}\right]^2dt\right)^{\frac12}\left(\int_0^{+\infty}\left[t^{\frac{x-1}{2}}e^{-t/2}\ln(t)\right]^2dt\right)^{\frac12}$$

$$\leqslant\Gamma(x)\Gamma''(x)$$

Donc $g''\geqslant0$, donc $\ln(\Gamma)$ est convexe.

3▸ $\forall x>0$, $\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}\underbrace{t^{x-1}}_{C^1}\,\underbrace{te^{-t}}_{C^0}dt=\left[-t^xe^{-t}\right]_{t\to0}^{t\to+\infty}-\int_0^{+\infty}-x\,t^{x-1}e^{-t}dt=0+x\Gamma(x)$.

4▸ $x\Gamma(x)=\Gamma(x+1)\xrightarrow[x\to0^+]{}\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$ car Γ est continue en 1, donc $\Gamma(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{x}$. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$. En particulier, $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, Γ est continue sur $[1,2]$ et dérivable sur $]1,2[$, donc d'après le théorème de ROLLE, $\exists c\in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c)=0$. De là, comme Γ est convexe, Γ' est croissante, donc $\forall x\geqslant c$, $\Gamma'(x)\geqslant0$, donc Γ est croissante sur $[c,+\infty[$. Comme $\Gamma(n+1)=n!\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, on



en déduit que $\Gamma(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Enfin, $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \underbrace{\dfrac{x-1}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1} \underbrace{\Gamma(x-1)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc Γ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

5 ▸ Soient $x>0$ et $y>0$.

▹ $B(x,y) = B(y,x)$ par simple changement de variable $u = 1-t$.

▹ $B(x+1,y) = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{\left(\frac{t}{1-t}\right)^x}_{C^1} \underbrace{(1-t)^{x+y-1}}_{C^0} dt = \left[\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \frac{-(1-t)^{x+y}}{x+y}\right]_{t\to 0^+}^{t\to 1^-} - \int_0^1 x \frac{1-t+t}{(1-t)^2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{-(1-t)^{x+y}}{x+y}\, dt$

$$= 0 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{x}{x+y} B(x,y).$$

6 ▸ Soient $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $g_n(t) = t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{0<t\leq n}$. Pour tout $t>0$, $g_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} t^{x-1}e^{-t}$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|g_n(t)| \leq e^{-t}t^{x-1}$ avec $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt < +\infty$ (en effet, par convexité de exp, $\forall u\in\mathbb{R}$, $e^u \geq 1+u$, donc $e^{-t/n} \geq 1-\frac{t}{n}$, donc $e^{-t} \geq (1-\frac{t}{n})^n$.) D'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^{+\infty} g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$. Or :

$$\int_0^{+\infty} g_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt \overset{u=\frac{t}{n}}{=} \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1}\, n\,du = n^x B(x,n+1) = n^x \frac{n}{x+n} B(x,n)$$

$$= n^x \frac{n}{x+n}\frac{n-1}{x+n-1} B(x,n-1) = \cdots = n^x \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)} B(x,1) = n^x \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}\int_0^1 t^{x-1}dt$$

$$= n^x \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}\frac{1}{x}.$$

Donc $\dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$.