ESPÉRANCE CONDITIONNELLE

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, X une variable aléatoire réelle intégrable. Il existe une variable aléatoire Z presque sûrement unique telle que Z est $\mathcal{B}$-mesurable et $\forall B \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[Z \mathbb{1}_B]$. De plus Z est intégrable, on la note $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$, et on l'appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$.

- UNICITÉ : Soient Y et Y' intégrables, $\mathcal{B}$-mesurables telles que $\forall B \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[Y' \mathbb{1}_B]$. Les événements $\{Y > Y'\}$ et $\{Y < Y'\}$ sont alors dans $\mathcal{B}$, donc $\mathbb{E}[\underbrace{(Y-Y')\mathbb{1}_{Y>Y'}}_{\geq 0}] = 0$ et $\mathbb{E}[\underbrace{(Y'-Y)\mathbb{1}_{Y<Y'}}_{\geq 0}] = 0$, donc $(Y-Y')\mathbb{1}_{Y>Y'} = (Y'-Y)\mathbb{1}_{Y<Y'} = 0$ presque sûrement, donc $Y = Y'$ presque sûrement.

- EXISTENCE :
  - Cas $X \in L^2$: l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un espace de Hilbert, il est donc convexe, fermé et non vide dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On peut donc considérer le projeté Z de X sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Elle est bien $\mathcal{B}$-mesurable, intégrable, et pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}[(X-Z)\mathbb{1}_B] = \langle X - Z \mid \mathbb{1}_B \rangle = 0$ car $X - Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})^\perp$, donc $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[Z \mathbb{1}_B]$.

  - Cas $X \geq 0$: pour $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = X \wedge n = \inf(X, n)$. Comme X_n est bornée, elle est L^2, donc on dispose de $Y_n = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{B}]$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, comme $X_{n+1} \geq X_n$, le lemme suivant montre que $Y_{n+1} \geq Y_n$.

    <u>Lemme</u> : Soit $(U,V) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2$.

    1▸ $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{B}]$ est linéaire

    2▸ Si $U \geq 0$ p.s., alors $\mathbb{E}[U|\mathcal{B}] \geq 0$ p.s. (en particulier, si $U \geq V$ p.s., alors $\mathbb{E}[U|\mathcal{B}] \geq \mathbb{E}[V|\mathcal{B}]$ p.s.

    3▸ $\mathbb{E}[\mathbb{E}[U|\mathcal{B}]] = \mathbb{E}[U]$

    <u>Preuve</u> : 1▸ $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{B}]$ est une projection

    2▸ Par l'absurde, supposons que $\mathbb{P}(\mathbb{E}[U|\mathcal{B}] < 0) > 0$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(\mathbb{E}[U|\mathcal{B}] < -\varepsilon) > 0$. Or $\{\mathbb{E}[U|\mathcal{B}] < \varepsilon\} \in \mathcal{B}$ donc $0 \leq \mathbb{E}[U \mathbb{1}_{\mathbb{E}[U|\mathcal{B}] < -\varepsilon}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U|\mathcal{B}] \mathbb{1}_{\mathbb{E}[U|\mathcal{B}] < -\varepsilon}] < -\varepsilon < 0$ p.s. : c'est absurde.

    3▸ $\mathbb{E}[\mathbb{E}[U|\mathcal{B}]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U|\mathcal{B}] \underbrace{1}_{\hookrightarrow \mathcal{B}\text{-mesurable}}] = \mathbb{E}[U \cdot 1] = \mathbb{E}[U]$.

    Posons $Y = \limsup_{n \to +\infty} Y_n$ qui est $\mathcal{B}$-mesurable et intégrable. Pour tout $B \in \mathcal{B}$, par convergence monotone et par définition de Y_n,

    $$\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_B] = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[Y_n \mathbb{1}_B] = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B]$$

  - Cas $X \in L^1$: On écrit $X = X^+ - X^-$. Comme $X^\pm \geq 0$, on dispose de $Z := \mathbb{E}[X^+|\mathcal{B}] - \mathbb{E}[X^-|\mathcal{B}]$: elle est $\mathcal{B}$-mesurable, intégrable, et $\forall B \in \mathcal{B}$, $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X^+ \mathbb{1}_B] - \mathbb{E}[X^- \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^+|\mathcal{B}]\mathbb{1}_B] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X^-|\mathcal{B}]\mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[Z \mathbb{1}_B]$.