Gourdon Algèbre (3e) p204-205
Rombaldi p634

DÉCOMPOSITION DE DUNFORD & EXPONENTIELLE MATRICIELLE

148, 153, 155, 157

<u>Thm</u> (décomposition de DUNFORD) : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé. Il existe un unique $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u = d+n$, d est diagonalisable, n est nilpotent, et d et n commutent. De plus, $(d,n) \in \mathbb{K}[u]^2$.

<u>Prop</u> : u est diagonalisable si et seulement si e^u est diagonalisable.

<u>Lemme</u> : Soit P un polynôme scindé annulateur de u. Soit $P = M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en produit de facteurs irréductibles. Pour $i \in [\![1,s]\!]$, posons $N_i = \operatorname{Ker}(M_i^{\alpha_i}(u))$, et notons p_i le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$. Pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, $p_i \in \mathbb{K}[u]$, pour $j \neq i$, $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\sum_{j=1}^{s} p_j = id_E$.

<u>Preuve du lemme</u> : D'après le lemme des noyaux, $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$, donc les p_i, $1 \leq i \leq s$ sont bien définis.
Pour $i \in [\![1,s]\!]$, on pose $Q_i = \prod_{j\neq i} M_j^{\alpha_j}$. Les polynômes $Q_1, \dots, Q_s$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, donc d'après le théorème de BÉZOUT, il existe $(U_1, \dots, U_s) \in \mathbb{K}[X]^s$ tel que $\sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1$, donc $\sum_{i=1}^{s} U_i(u) Q_i(u) = id_E$. Pour $i \in [\![1,s]\!]$, posons $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(u)$. Pour tout $j \neq i$, P divise $Q_i Q_j$ donc $p_i \circ p_j = P_i(u) P_j(u) = U_i(u) Q_i(u) U_j(u) Q_j(u) = U_i U_j \times Q_i Q_j(u) = U_i U_j(u) \circ 0 = 0$ (car $\mathbb{K}[u]$ est commutative). De là, pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, $p_i = p_i \circ id_E = p_i \circ \sum_{j=1}^{s} p_j = p_i^2$, donc p_i est un projecteur.

Montrons que $N_i = \operatorname{Im}(p_i)$:
$\supseteq$: Soit $x \in E$. On a $M_i^{\alpha_i}(u)(p_i(x)) = M_i^{\alpha_i} P_i(u)(x) = M_i^{\alpha_i} Q_i U_i(u)(x) = P\, U_i(u)(x) = U_i(u)(\underbrace{P(u)}_{=0}(x)) = 0$.
Donc $p_i(x) \in N_i$.
$\subseteq$: Soit $x \in N_i$. D'après ce qui précède, $x = \sum_{j=1}^{s} p_j(x)$. Pour $j \neq i$, $p_j(x) = U_j Q_j(u)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i} \mid Q_j$ et $N_i = \operatorname{Ker}(M_i^{\alpha_i}(u))$. Ainsi, $x = p_i(x) \in \operatorname{Im}(p_i)$.

Montrons que $\operatorname{Ker}(p_i) = \bigoplus_{j\neq i} N_j$:
$\supseteq$: Pour tout $j \neq i$, pour tout $x \in N_j$, $p_i(x) = U_i Q_i(u)(x) = 0$ comme ci-dessus. Donc $N_j \subseteq \operatorname{Ker}(p_i)$.
Finalement, $\bigoplus_{j\neq i} N_j \subseteq \operatorname{Ker}(p_i)$.
$\subseteq$: Pour tout $x \in \operatorname{Ker}(p_i)$, $x = id_E(x) = \sum_{j=1}^{s} p_j(x) = \sum_{j\neq i} p_j(x) \in \sum_{j\neq i} \operatorname{Im}(p_j) = \bigoplus_{j\neq i} N_j$.

<u>Preuve du Thm</u> : ▸ Écrivons $\chi_u = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. Pour $i \in [\![1,s]\!]$, on pose $N_i = \operatorname{Ker}((u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i})$ et on note p_i le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$, qui est un polynôme en u d'après le lemme (puisque d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$). Posons $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i \in \mathbb{K}[u]$ et $n = u - d \in \mathbb{K}[u]$. Par construction, d est diagonalisable, $u = d+n$ et d et n commutent

(ce sont des polynômes en u). Il ne reste qu'à vérifier que n est nilpotent :

$$n^\alpha = (u-d)^\alpha = \left(u\circ id_E - \sum_{j=1}^{s} \lambda_j p_j\right)^\alpha = \left(\sum_{j=1}^{s} (u-\lambda_j id_E) p_j\right)^\alpha = \sum_{j=1}^{s} (u-\lambda_j id_E)^\alpha p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

D'après le lemme : $id_E = \sum_{j=1}^{s} p_j$ / $p_i \circ p_j = \begin{cases} p_i^2 = p_i & \text{si } j=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et tout commute / $\mathrm{Im}(p_i) = N_i = \mathrm{Ker}\left((u-\lambda_i id_E)^{\alpha_i}\right)$

en posant $\alpha = \max_{1\leq i\leq s} \alpha_i$; on a $n^\alpha = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc n est nilpotent.

- UNICITÉ : Soit (d', n') une décomposition de DUNFORD de u. Montrons que $(d',n') = (d,n)$. Comme d, d', n et n' sont des polynômes en u, ils commutent. En particulier, d et d' sont codiagonalisables,$^{(*)}$ a fortiori $d-d'$ est diagonalisable. De même, $n'-n$ est nilpotent,$^{(\dagger)}$ et comme $d-d' = n'-n$, on obtient$^{(\ddagger)}$ $n'-n = d-d' = 0_{\mathcal{L}(E)}$, i.e. $d=d'$ et $n=n'$. ■

(* : Rappel de l'idée de la preuve : par récurrence sur la dimension, en commençant par exclure le cas où d et d' sont des homothéties.)

($\dagger$: comme n et n' commutent, $(n-n')^{2\alpha} = \sum_{k=0}^{2\alpha} \binom{2\alpha}{k} n^k (-n')^{2\alpha-k} = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{2\alpha}{k} (-1)^k n^k \underbrace{n'^{\overbrace{2\alpha-k}^{\geq\alpha}}}_{=0_{\mathcal{L}(E)}} + \sum_{k=\alpha+1}^{2\alpha} \binom{2\alpha}{k} (-1)^k \underbrace{n^{\overbrace{k}^{\geq\alpha}}}_{=0_{\mathcal{L}(E)}} n'^{2\alpha-k} = 0$)

($\ddagger$: Si v est diagonalisable et nilpotent, alors $\pi_v = X^r$ est scindé à racines simples, i.e. $\pi_v = X$, donc $v = X(v) = \pi_v(v) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.)

<u>Preuve de la Prop</u> : La preuve repose sur la proposition suivante :

<u>Prop</u> : Si $u = d+n$ désigne la décomposition de DUNFORD de u, alors $e^u = e^d + e^d(e^n - id_E)$ désigne la décomposition de DUNFORD de u (sous-entendu, e^d est diagonalisable).

<u>Preuve</u> : Comme d et n commutent, en notant p l'indice de nilpotence de n :

$$e^u = e^d e^n = e^d \sum_{k=0}^{p-1} \frac{n^k}{k!} = e^d\left(id_E + n\sum_{k=1}^{p-1} \frac{n^{k-1}}{k!}\right) = e^d + nv$$

où $v = e^d \sum_{k=1}^{p-1} \frac{n^{k-1}}{k!}$ (NB : e^d et n commutent car d et n commutent). Comme n et v commutent, $(nv)^p = n^p v^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, et nv est nilpotent. Ainsi, e^d est diagonalisable, nv est nilpotent et commute avec e^d : on a trouvé la décomposition de DUNFORD de e^u. Il suffit pour conclure d'écrire :

$$nv = e^d \sum_{k=1}^{p-1} \frac{n^k}{k!} = e^d(e^n - id_E)$$

D'après cette proposition, en désignant par $u = d+n$ la décomposition de DUNFORD de u, il s'agit de montrer que $n = 0 \Leftrightarrow e^n = id_E$. ($u$ diagonalisable $\Leftrightarrow n=0$ et e^u diagonalisable $\Leftrightarrow e^n = id_E$ car e^d est inversible.) L'implication directe est immédiate, supposons que $e^n = id_E$. Notons p l'indice de nilpotence de n. On a donc $\sum_{k=0}^{p} \frac{n^k}{k!} = id_E$, donc $\sum_{k=1}^{p} \frac{n^k}{k!} = 0_{\mathcal{L}(E)}$, i.e. $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} X^k$ annule n. Le polynôme minimal de n est $\pi_n = X^p$, et divise $\sum_{k=1}^{q} \frac{X^k}{k!}$. Par identification des coefficients dominants, $\frac{1}{p!} = 1$, i.e. $p=0$ ou $p=1$. Or $n^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $p=1$, donc $n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.