Gourdon p 42+328+349

APPLICATIONS DONT LA DIFFÉRENTIELLE EST UNE ISOMÉTRIE

204, 215

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 1 : Tout ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par ligne brisée.

Lemme 2 : Si df est nulle sur un ouvert connexe $U \subseteq \mathbb{R}^n$, alors f est constante sur U.

Thm : Si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est une isométrie, alors f est affine.

Preuve du Lemme 1 : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ connexe non vide. Soit $x_0 \in \Omega$, notons T_{x_0} l'ensemble des points de Ω qu'on peut relier à x_0 par ligne brisée.

- Soit $x \in T_{x_0}$. Il existe $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subseteq \Omega$. Or pour tout $y \in B(x,\rho)$, $[x,y] \subseteq B(x,\rho) \subseteq \Omega$, et on peut lier x à x_0 par une ligne brisée. Par concaténation, $y \in T_{x_0}$, donc $B(x,\rho) \subseteq T_{x_0}$. Ainsi, T_{x_0} est ouvert.
- Soit $x \in \overline{T_{x_0}} \cap \Omega$. Il existe $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subseteq \Omega$ et $B(x,\rho) \cap T_{x_0} \neq \emptyset$. Soit $y \in B(x,\rho) \cap T_{x_0}$. On peut alors relier y à x_0 et x à y par lignes brisées, donc $x \in T_{x_0}$. Ainsi, T_{x_0} est fermé.

Comme $x_0 \in T_{x_0} \neq \emptyset$ et Ω est connexe, $\Omega = T_{x_0}$. A fortiori Ω est connexe par lignes brisées. ■

Preuve du Lemme 2 : Soit $(x,y) \in U^2$. D'après Lemme 1, on peut lier x à y par une ligne brisée. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur chaque segment $[a,b]$ de cette ligne brisée, on montre que $\|f(a)-f(b)\| \leqslant \sup_{c \in [a,b]} |||df(c)||| \cdot \|a-b\| = 0$, donc $f(x) = f(y)$, et donc f est constante sur U. ■

Preuve du Thm : ▸ Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Montrons qu'il existe $U_a \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert tel que $\forall (x,y) \in U_a^2$, $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$:
Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|df(x)\| = \sup_{\|y\|=1} \|df(x)(y)\| = \sup_{\|y\|=1} \|y\| = 1$ par hypothèse, donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |||df(z)||| \cdot \|x-y\| = \|x-y\|$. Ensuite, $df(a)$ est une isométrie, elle est inversible, donc d'après le théorème d'inversion locale, il existe $V_a \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert tel que $a \in V_a$ et $f : V_a \to W_a := f(V_a)$ est un C^1-difféomorphisme, dont on note g la réciproque. Pour tout $y = f(x) \in W_a$, $dg(y) = df(x)^{-1}$ est une isométrie, donc $|||dg(y)||| = 1$. Soit $B \subseteq W_a$ une boule ouverte centrée en $f(a)$, posons $U_a = g(B)$. D'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall (x,y) \in B^2$, $\|g(x)-g(y)\| \leqslant \|x-y\|$, et donc $\forall (x,y) \in U_a^2$, $\|x-y\| = \|g(f(x)) - g(f(y))\| \leqslant \|f(x)-f(y)\|$, a fortiori $\forall (x,y) \in U_a^2$, $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$. (Et U_a est bien ouvert car g est continue.)

▸ D'après ce qui précède, $\forall (x,y) \in U_a^2$, $\langle f(x)-f(y) \mid f(x)-f(y) \rangle = \langle x-y \mid x-y \rangle$, donc en différentiant cette égalité par rapport à x, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $2\langle df(x)(h) \mid f(x)-f(y) \rangle = 2\langle h \mid x-y \rangle$. En différentiant à nouveau par rapport à y, on montre que pour tout $k \in \mathbb{R}^n$, $\langle df(x)(h) \mid -df(y)(k) \rangle = \langle h \mid -k \rangle$. De là, $\forall (x,y) \in U_a^2$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|df(x)(h) - df(y)(h)\|^2 = \|df(x)(h)\|^2 - 2\langle df(x)(h) \mid df(y)(h) \rangle + \|df(y)(h)\|^2 = \|h\|^2 - 2\langle h \mid h \rangle + \|h\|^2 = 0$$

donc $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $df(x)(h) = df(y)(h)$, donc $df(x) = df(y)$.

▸ Posons $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid df(x) = df(0)\}$. D'après ce qui précède, pour tout $a \in \Gamma$, il existe $U_a \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que $\forall (x,y) \in U_a^2$, $df(x) = df(y)$, mais $a \in U_a$ donc $\forall x \in U_a$, $df(x) = df(a) = df(0)$. Ainsi, $U_a \subseteq \Gamma$, et donc Γ est ouvert.
Par ailleurs, $\Gamma = (df)^{-1}(\{df(0)\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue, puisque f est de classe C^1. Comme $0 \in \Gamma$ et $\mathbb{R}^n$ est connexe (car convexe), $\Gamma = \mathbb{R}^n$, i.e. df est constante. Ainsi, $df - df(0) = d(f - df(0)) = 0$, mais $\mathbb{R}^n$ est connexe, donc d'après le Lemme, il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f - df(0) = a$, i.e. $f = df(0) + a$ est une application affine. ■