Chabanol-Ruch p59 (sauf fin de Thm 2)

CONVERGENCE EN LOI DISCRÈTE & APPROXIMATION BINOMIALE - POISSON

261, 262, 264

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X_n, n\in\mathbb{N}$ et X des variables aléatoires réelles sur Ω. Soit $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable de $\mathbb{R}$.

Def : On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X, et on note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$, si pour toute fonction continue bornée $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

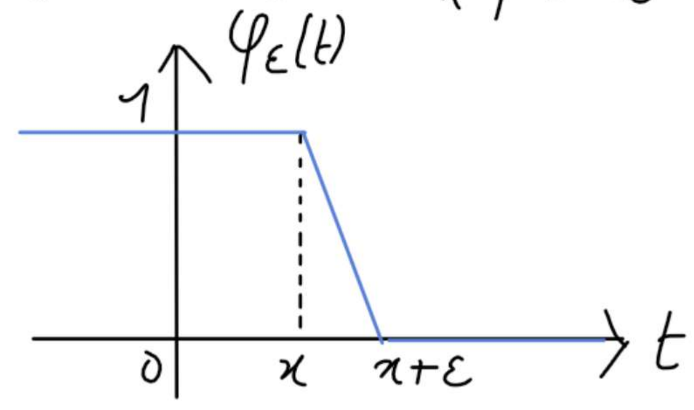
Thm : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \left(\forall x\in\mathbb{R},\ F_X \text{ continue en } x \Rightarrow F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(x)\right)$

Thm : Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}$, X_n et X sont à valeurs dans D presque-sûrement.

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X=k).$$

Appli : Soient $\lambda>0$ et $(p_n)_n \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit X_n de loi $\mathcal{B}(n,p_n)$. Alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

Preuve de Thm 1 : $\Rightarrow$) Supposons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$. Soit $x\in\mathbb{R}$ un point de continuité de F_X, soit $\varepsilon>0$



Considérons la fonction φ_ε dont la courbe représentative est donnée ci-contre. Comme $\varphi_\varepsilon \geq \mathbb{1}_{\cdot\leq x}$, par croissance de $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X_n)] \geq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_n\leq x}]$ $= \mathbb{P}(X_n\leq x) = F_{X_n}(x)$. De là,

$$\mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X)] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X_n)] = \limsup_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X_n)] \geq \limsup_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$$

Or $\mathbb{1}_{\cdot\leq x+\varepsilon} \leq \varphi_\varepsilon$ donc $F_X(x+\varepsilon) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X\leq x+\varepsilon}] \leq \mathbb{E}[\varphi_\varepsilon(X)]$, donc $F_X(x+\varepsilon) \geq \limsup_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$.

Comme F_X est continue, on a donc $F_X(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x+\varepsilon) \geq \limsup_{n\to+\infty} F_{X_n}(x)$.

On montre de la même manière que $\liminf_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) \geq \lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x-\varepsilon) = F_X(x)$, d'où $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(x)$.

$\Leftarrow$) Réciproquement, soit $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue bornée. En particulier, φ peut être uniformément approchée par des fonctions en escalier. Comme F est croissante, ses points de discontinuité sont en quantité dénombrable. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $x_1, \dots, x_{k+1}$ des points de continuité de F et $a_1,\dots,a_k$ des réels tels que $\|\varphi - g\|_\infty \leq \varepsilon$, où $g = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbb{1}_{]x_j, x_{j+1}]}$. De là, $|\mathbb{E}[\varphi(X_n)] - \mathbb{E}[\varphi(X)]| \leq |\mathbb{E}[(\varphi-g)(X_n)]| + |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| + |\mathbb{E}[(g-\varphi)(X)]|$ $\leq 2\varepsilon + |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]|$. Or $\mathbb{E}[g(X_n)] = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbb{P}(x_j < X_n \leq x_{j+1}) = \sum_{j=1}^{k} a_j (F_{X_n}(x_{j+1}) - F_{X_n}(x_j)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[g(X)]$ par hypothèse, donc $|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| \leq \varepsilon$ pour n assez grand, donc $|\mathbb{E}[\varphi(X_n)] - \mathbb{E}[\varphi(X)]| \leq 3\varepsilon$ pour n grand. ∎

Preuve de Thm 2 : Soit $k\in\mathbb{N}$, il existe $\varepsilon>0$ tel que $[x_k-\varepsilon, x_k+\varepsilon] \cap D = \{x_k\}$. Comme $X\in D$ presque sûrement, $x_k\pm\varepsilon$ sont des points de continuité de F_X.

* Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$, alors $F_{X_n}(x_k\pm\varepsilon) \longrightarrow F_X(x_k\pm\varepsilon)$, donc $\mathbb{P}(X_n = x_k) = \mathbb{P}(x_k-\varepsilon < X_n \leq x_k+\varepsilon) = F_{X_n}(x_k+\varepsilon) - F_{X_n}(x_k-\varepsilon)$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(x_k-\varepsilon < X \leq x_k+\varepsilon) = \mathbb{P}(X=x_k).$$

* Réciproquement, si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = x_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = x_k)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que F_X est continue en x, $|F_{X_n}(x) - F_X(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En effet,

$$|F_{X_n}(x) - F_X(x)| = \Big| \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ x_k \leq x}} \mathbb{P}(X_n = x_k) - \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ x_k \leq x}} \mathbb{P}(X = x_k) \Big| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |\mathbb{P}(X_n = x_k) - \mathbb{P}(X = x_k)|$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{P}(X_n = x_k)}_{\text{sommable}} + \underbrace{\mathbb{P}(X = x_k)}_{\text{sommable}} - 2 \underbrace{\min(\mathbb{P}(X_n = x_k), \mathbb{P}(X = x_k))}_{\leq \mathbb{P}(X = x_k),\ \text{sommable}}$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n = x_k) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_k) - 2 \sum_{k\in\mathbb{N}} \min(\mathbb{P}(X_n = x_k), \mathbb{P}(X = x_k))$$

$$\leq 2 - 2 \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\min(\mathbb{P}(X_n = x_k), \mathbb{P}(X = x_k))}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = x_k) \text{ par hypothèse}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 - 2 \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_k) = 0 \qquad (\text{convergence dominée}, \leq \mathbb{P}(X = x_k)). \quad \blacksquare$$

<u>Preuve de Appli</u> : Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!}\, n(n-1)\cdots(n-k+1) \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{\substack{np_n \to \lambda \\ \text{donc } p_n \sim \frac{\lambda}{n}}} (1-p_n)^n \underbrace{(1-p_n)^{-k}}_{\substack{\to 1 \\ \text{car } p_n \to 0}} \sim \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\sim 1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\sim 1} \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\sim 1} e^{-\lambda} \cdot 1 \sim e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} > 0$$

$$(1-p_n)^n = e^{n \ln(1-p_n)} \underset{p_n \to 0}{=} e^{n(-p_n + o(p_n))} = e^{-np_n + o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda} > 0$$

Donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$. $\blacksquare$