Hirsch-Lacombe p 91

205, 213
208, 219, 253

PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ & THÉORÈME DE RIESZ

Soit $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. La linéarité de $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est prise à gauche dans le cas complexe.
On note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et $\mathcal{H}'$ l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{H}$. Soit $C \subseteq \mathcal{H}$ un convexe fermé non vide.

Thm 1 (de projection sur un convexe fermé) : $\forall x \in \mathcal{H}, \exists!\, P_C(x) \in C : \|x - P_C(x)\| = d(x,C) = \inf_{y \in C} \|x-y\|$.

Prop 2 : $\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in C, \quad y = P_C(x) \iff \forall z \in C,\ \mathrm{Re}(\langle x-y | z-y\rangle) \leq 0$ (FIGURE 1)

Cor 3 : Soit F un sous-espace vectoriel fermé. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a : $\forall y \in \mathcal{H},\ y = P_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$. (Peut être admis)

Prop 4 : Soit F un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$. On a $\mathcal{H} = \overline{F} \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$. En particulier, $\overline{F} = \mathcal{H} \iff F^\perp = \{0\}$.

Thm 5 (de représentation de Riesz) : Pour tout $\varphi \in \mathcal{H}'$, il existe un unique $y_\varphi \in \mathcal{H}$ tel que $\varphi = \langle \cdot | y_\varphi \rangle$. L'application $\varphi \mapsto y_\varphi$ est un isomorphisme isométrique.

Preuve de Thm 1 : Soit $x \in \mathcal{H}$, posons $d = d(x, C)$.

- Existence : D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(y_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $d = \lim_{n \to +\infty} \|x - y_n\|$. Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, d'après l'identité du parallélogramme,

$$\|(x-y_n) + (x-y_m)\|^2 + \|(x-y_n) - (x-y_m)\|^2 = 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2)$$

donc
$$4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2)$$

donc
$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) - 4\Big\|x - \underbrace{\frac{y_n+y_m}{2}}_{\in C \text{ : convexe}}\Big\|^2 \\ &\leq 2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) - 4d^2 \qquad \text{car } d = \inf_{y\in C}\|x-y\| \\ &\leq 2\Big[\underbrace{(\|x-y_n\|^2 - d^2)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{(\|x-y_m\|^2 - d^2)}_{\xrightarrow[m\to+\infty]{} 0}\Big]\end{aligned}$$

Donc $\|y_n - y_m\|$ peut être rendu arbitrairement petit en prenant n et m suffisamment grands : autrement dit, $(y_n)_n$ est de Cauchy, mais $\mathcal{H}$ est complet, donc $(y_n)_n$ converge vers un $y \in \mathcal{H}$. Comme $(y_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ et C est fermé, on a $y \in C$.

- Unicité : Soient $y_1 \in C$ et $y_2 \in C$ tels que $\|y_1 - x\| = \|y_2 - x\| = \inf_{y \in C} \|y - x\|$. D'après l'identité du parallélogramme,

$$\|(x-y_1) + (x-y_2)\|^2 + \|(x-y_1) - (x-y_2)\|^2 = 2(\|x-y_1\|^2 + \|x-y_2\|^2)$$

donc $\left\|x - \frac{y_1+y_2}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_1-y_2}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(d^2 + d^2)$

donc $d^2 \leq \Big\|x - \underbrace{\frac{y_1+y_2}{2}}_{\in C,\text{ convexe}}\Big\|^2 \leq d^2 - \left\|\frac{y_1-y_2}{2}\right\|^2$

donc $\left\|\frac{y_1-y_2}{2}\right\|^2 \leq 0$, donc $y_1 = y_2$ ∎

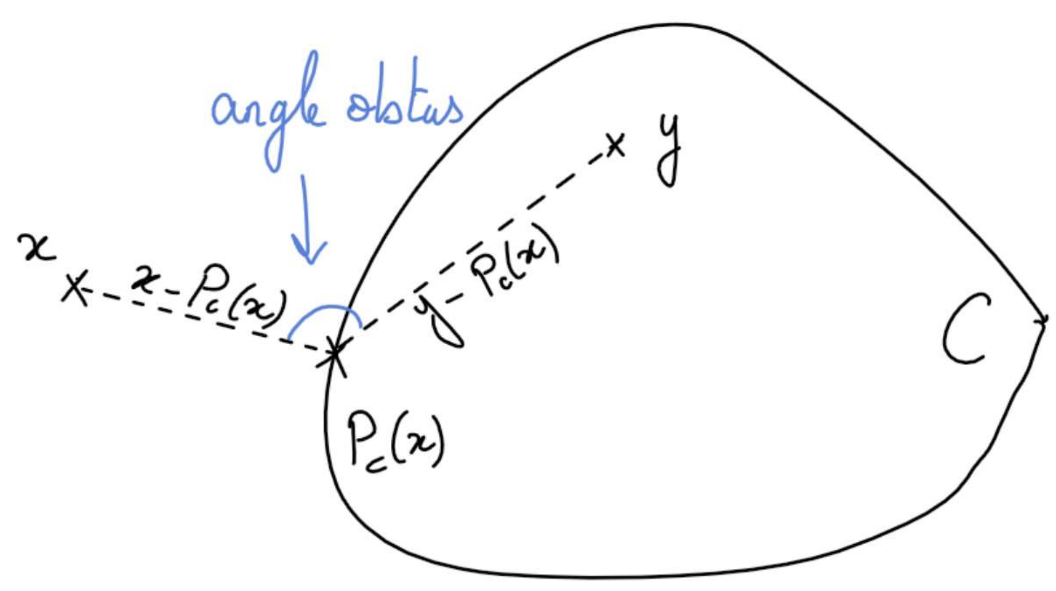

FIGURE 1

Preuve de Prop 2 : Soient $x \in \mathcal{H}$ et $y \in C$.

- Supposons que $y = P_C(x)$. Soient $z \in C$ et $t \in]0,1]$. Par convexité, $(1-t)P_C(x) + tz \in C$, donc $\|x - P_C(x)\|^2 \leq \|x - (1-t)P_C(x) - tz\|^2 = \|x - P_C(x) + t(P_C(x) - z)\|^2$ $= \|x - P_C(x)\|^2 + t^2\|z - P_C(x)\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x) | P_C(x) - z\rangle)$, donc $2t\,\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x) | z - P_C(x)\rangle) \leq t^2 \|z - P_C(x)\|^2$. En divisant par t et en faisant tendre $t \to 0$, on obtient $\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x) | z - P_C(x)\rangle) \leq 0$.
- Supposons que $\forall z \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x-y | z-y\rangle) \leq 0$. Pour tout $z \in C$,

$$\|x-z\|^2 = \|(x-y) - (z-y)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|z-y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle x-y|z-y\rangle) \geq \|x-y\|^2 + \underbrace{\|z-y\|^2}_{\geq 0} \geq \|x-y\|^2 \text{ donc } y = P_C(x). \quad ∎$$

<u>Preuve de Cor 3</u> : Soit $(x,y)\in \mathcal{H}^2$. Comme F est un convexe fermé non vide, $P_F(x)$ existe bien.
(Peut être admise)

▸ Supposons que $y = P_F(x)$. Déjà, $P_F(x)\in F$. Pour tout $z\in F$, d'après Prop 2, $\mathrm{Re}(\langle x-P_F(x) \mid z-P_F(x)\rangle)\leqslant 0$. En particulier, comme F est un espace vectoriel, $\forall \lambda\in\mathbb{K}$, $\forall z\in F$, $\lambda z + P_F(x)\in F$ et $\mathrm{Re}(\bar\lambda\langle x-P_F(x)\mid z\rangle)\leqslant 0$. En remarquant que $\forall \zeta\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(i\zeta) = -\mathrm{Im}(\zeta)$, en prenant $\lambda=\pm 1$ et $\lambda = \pm i$, on montre que $\forall z\in F$, $\langle x-P_F(x)\mid z\rangle = 0$, i.e. $x-P_F(x)\in F^\perp$.

▸ Supposons que $y\in F$ et $x-y\in F^\perp$. Pour tout $z\in F$, $\|x-z\|^2 = \|\underbrace{(x-y)}_{\in F^\perp}-\underbrace{(z-y)}_{\in F}\|^2 = \|x-y\|^2+\|z-y\|^2 \geqslant \|x-y\|^2$ donc $y = P_F(x)$. ■

<u>Preuve de Prop 4</u> : Pour tout $x\in\mathcal{H}$, $P_{\overline{F}}(x)\in\overline{F}$ et $x-P_{\overline{F}}(x)\in \overline{F}^\perp = F^\perp$ d'après Cor 3, donc $\mathcal{H} = \overline{F}+F^\perp$. De plus, $\overline{F}\cap F^\perp = \{0\}$, donc $\mathcal{H} = \overline{F}\oplus F^\perp$. ■

<u>Preuve de Thm 5</u> : Soit $\varphi\in\mathcal{H}'$.

▸ EXISTENCE : Si $\varphi = 0$, alors $y_\varphi = 0$ convient. Supposons que $\varphi\neq 0$. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace fermé (car φ est continue) de $\mathcal{H}$ distinct de $\mathcal{H}$, donc d'après Prop 4, on peut choisir $u\in\mathrm{Ker}(\varphi)^\perp\setminus\{0\}$. En particulier, $u\notin\mathrm{Ker}(\varphi)$, donc $\varphi(u)\neq 0$, et on peut poser $y_\varphi = \frac{u}{\varphi(u)}$. Pour tout $x\in\mathcal{H}$, $\langle x\mid y_\varphi\rangle y_\varphi\in\mathrm{Ker}(\varphi)^\perp$, mais $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\varphi)\oplus\mathrm{Ker}(\varphi)^\perp$ (Cor 3) et $\mathrm{Ker}(\varphi)^\perp$ est de dimension 1 (car $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan), donc par unicité d'écriture, $x-\langle x\mid y_\varphi\rangle y_\varphi\in\mathrm{Ker}(\varphi)$

De là,

$$\varphi(x) = \varphi(\langle x\mid y_\varphi\rangle y_\varphi + (x-\langle x\mid y_\varphi\rangle y_\varphi)) = \langle x\mid y_\varphi\rangle\,\varphi(y_\varphi) + \varphi(\underbrace{x-\langle x\mid y_\varphi\rangle y_\varphi}_{\in\mathrm{Ker}(\varphi)}) = \langle x\mid y_\varphi\rangle\cdot 1 + 0 = \langle x\mid y_\varphi\rangle$$

Donc $\varphi = \langle\cdot\mid y_\varphi\rangle$.

▸ UNICITÉ Si $\tilde{y}_\varphi\in\mathcal{H}$ vérifie $\varphi = \langle\cdot\mid\tilde{y}_\varphi\rangle = \langle\cdot\mid y_\varphi\rangle$, alors $\forall x\in\mathcal{H}$, $\langle x\mid y_\varphi-\tilde{y}_\varphi\rangle = \langle x\mid y_\varphi\rangle - \langle x\mid\tilde{y}_\varphi\rangle = \varphi(x)-\varphi(x) = 0$, donc $y_\varphi-\tilde{y}_\varphi\in\mathcal{H}^\perp = \{0\}$, donc $y_\varphi = \tilde{y}_\varphi$.

▸ ISOMÉTRIE : Soient $\varphi\in\mathcal{H}'$ et $y_\varphi\in\mathcal{H}$ tel que $\varphi = \langle\cdot\mid y_\varphi\rangle$. Si $y_\varphi = 0$, alors $\|y_\varphi\| = |||\varphi||| = 0$. Supposons que $y_\varphi\neq 0$. Pour tout $x\in\mathcal{H}$, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $|\varphi(x)| = |\langle x\mid y_\varphi\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|y_\varphi\|$ donc $|||\varphi|||\leqslant\|y_\varphi\|$. De plus, $\varphi(y_\varphi) = \langle y_\varphi\mid y_\varphi\rangle = \|y_\varphi\|^2$, donc $|||\varphi||| = \|y_\varphi\|$. Ainsi $\varphi\mapsto y_\varphi$ est une isométrie. ■