Rombaldi p366

Gourdon Analyse 3 p315

THÉORÈME DE BOHR-MOLLERUP

229, 253, 265

Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ dérivable, logarithmiquement convexe, qui vaut 1 en 1 et telle que $\forall x>0,\ f(x+1) = x f(x)$. C'est la fonction Γ.

UNICITÉ

Posons $g = \ln \circ f$ qui est convexe par hypothèse. D'après l'inégalité des trois pentes, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$,

$$\frac{g(n+1)-g(n)}{(n+1)-n} \leqslant \left(\frac{g(n+1+x)-g(n)}{(n+1+x)-n} \leqslant\right) \frac{g(n+1+x)-g(n+1)}{(n+1+x)-(n+1)} \leqslant \frac{g(n+2)-g(n+1)}{(n+2)-(n+1)}$$

D'après l'équation fonctionnelle de f, $f(n+1) = n!\, f(1) = n!$, et $f(n+1+x) = (n+x)\cdots(x+1)\,x\, f(x)$

$$\ln(n) = \ln(n!) - \ln((n-1)!) \leqslant \frac{1}{x}\ln\left(\frac{(n+x)\cdots(x+1)x}{n!} f(x)\right) \leqslant \ln((n+1)!) - \ln(n!) = \ln(n+1)$$

donc $n^x \leqslant \frac{(n+x)\cdots(x+1)x}{n!} f(x) \leqslant (n+1)^x$, donc $1 \leqslant f(x)/\Gamma_n(x) \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^x$ où $\Gamma_n(x) = \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Or $\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\Gamma_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

EXISTENCE

1 ▸ Pour $x>0$ et $t>0$, posons $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$. Comme $f(x,t) \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ et $1-x<1$, $f(x,\cdot) \in L^1(]0,1])$, et comme $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $f(x,\cdot) \in L^1([1,+\infty[)$. Ainsi, $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x>0$. Soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}^{+*}$, soit $x \in [a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \ln(t)^n t^{x-1} e^{-t}$. Si $0<t<1$, alors $\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant |\ln(t)|^p t^{a-1} \underset{t\to0^+}{=} o\left(t^{\frac{a}{2}-1}\right)$ (croissance comparée), et si $t \geqslant 1$, alors $\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \ln(t)^p t^{b-1} e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} O(e^{-t/2})$. Ainsi $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est majorée par une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$ indépendante de $x \in [a,b]$, pour tout $t>0$, $f(\cdot,t)$ est de classe C^n, donc d'après les théorèmes de transfert de régularité sous le signe intégrale, Γ est de classe C^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, Γ est lisse sur $[a,b]$, quelque soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}^{+*}$. Finalement, $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$.

(Rq : 2 possibilités de rédaction plus soignée : par récurrence sur n, ou par holomorphie sur le demi-plan. Il ne faut pas passer trop de temps sur ce point (2 min max)).

2 ▸ Γ est C^2 et $\forall x>0$, $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t}}_{\geqslant 0} dt \geqslant 0$ donc Γ est convexe.

Posons $g = \ln \circ \Gamma$: elle est C^2, et $g'' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}$. Or pour tout $x>0$,

$$\Gamma'(x)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1} e^{-t} dt\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \underbrace{\left[t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}\right]}_{\in L^2} \cdot \underbrace{\left[t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \ln(t)\right]}_{\in L^2} dt\right)^2$$

$$\overset{C.S.}{\leqslant} \left(\int_0^{+\infty} \left[t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}\right]^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \left[t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \ln(t)\right]^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

Donc $g'' \geqslant 0$, donc $\ln(\Gamma)$ est convexe.

3 ▸ L'équation fonctionnelle découle d'une IPP.

Rq : par unicité, cela montre la formule d'Euler-Gauss.