NOMBRE DE RELATIONS D'ÉQUIVALENCE
(NOMBRES DE BELL & FORMULE DE DOBLINSKI)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de relations d'équivalence sur $[\![1,n]\!]$ (B_n est le n^e nombre de BELL). On conviendra que $B_0 = 1$.

0▸

1▸ $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$

2▸ La série entière de la variable réelle $\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n$ a un rayon de convergence $R>0$, et sa somme S vérifie $S' = \exp \times S$ sur $]-R,R[$

3▸ $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!}$ (formule de DOBLINSKI)

0▸ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $[\![1,n]\!]$, alors l'ensemble $[\![1,n]\!]/\mathcal{R}$ de ses classes d'équivalence est une partition de $[\![1,n]\!]$. Réciproquement, si $\{P_1,\dots,P_r\}$ est une partition de $[\![1,n]\!]$, alors elle est l'ensemble des classes d'équivalence d'une et une seule relation d'équivalence, à savoir $x \mathcal{R} y \iff \exists i \in [\![1,r]\!] : (x,y) \in P_i^2$. Ainsi, B_n est le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$, et ne dépend que de n – a fortiori B_n est le nombre de partitions d'un ensemble (quelconque) à n éléments.

1▸ Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}_{n+1}$ l'ensemble des partitions d'un ensemble à $n+1$ éléments. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $\mathcal{P}_{n+1,k}$ l'ensemble éléments de $\mathcal{P}_{n+1}$ dont la composante contenant $n+1$ est de cardinal $k+1$. De là, $\mathcal{P}_{n+1} = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_{n+1,k}$, donc $B_{n+1} = \#\mathcal{P}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \#\mathcal{P}_{n+1,k}$. Or choisir un élément de $\mathcal{P}_{n+1,k}$, c'est choisir les k éléments constituant avec $n+1$ la composante contenant $n+1$: il y a $\binom{n}{k}$ choix, puis choisir une partition des $n-k$ éléments restant : il y a B_{n-k} choix. Ainsi, $\#\mathcal{P}_{n+1,k} = \binom{n}{k} B_{n-k}$, puis $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$.

2▸ On a $B_0 = 1 \leq 0!$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifions que $B_n \leq n!$. Soit $P = \{P_1,\dots,P_r\} \in \mathcal{P}_n$. Pour $i \in [\![1,r]\!]$, on note $P_i = \{x_1^{(i)},\dots,x_{t_i}^{(i)}\}$ avec $x_1^{(i)} < \dots < x_{t_i}^{(i)}$. On lui associe $c_i = (x_1^{(i)}\ x_2^{(i)} \cdots x_{t_i}^{(i)})$ avec la convention $c_i = \mathrm{id}$ si $t_i = 1$. Par unicité de la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, $P \mapsto c_1 \cdots c_r$ est une injection de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathfrak{S}_n$, donc $B_n = \#\mathcal{P}_n \leq \#\mathfrak{S}_n = n!$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{B_n}{n!} \geq 1$, donc $R := R\left(\frac{B_n}{n!}\right) \geq R(1) = 1 > 0$. Pour tout $t \in]-R,R[$, on peut dériver S terme à terme :

$$S'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}\, t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} \right) t^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \right) = e^t S(t)$$

(produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes).

3▸ Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in]-R,R[,\ S(t) = \lambda e^{e^t}$, mais $1 = B_0 = S(0) = \lambda e^{e^0} = \lambda e$, donc $\lambda = 1/e$. Par ailleurs, $R = +\infty$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e S(t) = e^{e^t} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(e^t)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tp)^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{p,n}(t)$ où $u_{p,n}(t) = \frac{t^n p^n}{p!\,n!}$. Comme $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{p,n}(t)| = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{p,n}(|t|) = e^{e^{|t|}} < +\infty$, d'après le théorème de FUBINI-TONELLI, la famille $(u_{p,n}(t))_{p,n}$ est sommable, donc d'après le théorème de FUBINI,

$$e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = e\, S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{p,n}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^n p^n}{p!\,n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!} \right) \frac{t^n}{n!}$$

Par unicité du développement en série entière :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B_n = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!}}$$

Remarque amusante : si $X \sim \mathcal{P}(1)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X^n] = \sum_{p=0}^{+\infty} p^n\, \mathbb{P}(X=p) = \sum_{p=0}^{+\infty} p^n e^{-1} \frac{1^p}{p!} = B_n$

Remarque intéressante : il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^n \leq q!$. On a $B_n = \left\lceil \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{q-1} \frac{p^n}{p!} \right\rceil$.