

## 41 Enveloppe convexe du groupe orthogonal

ref : Giorgi ?

THÉORÈME 41.1 *L'enveloppe convexe de  $O(n, \mathbb{R})$  est la boule unité de  $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  pour la norme 2.*

PREUVE. Commençons par une proposition :

PROPOSITION 41.2 *Le dual de  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$  est l'ensemble des applications de la forme  $M \rightarrow \text{tr}(AM)$  pour  $A \in \mathcal{M}(n, K)$ .*

PREUVE. On définit l'application linéaire  $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{K})^*$  qui à  $A$  associe  $\text{tr}(A \cdot)$ . Son noyau est l'ensemble des matrices  $A$  telles que  $\text{tr}(AM) = 0$  pour tout  $M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ . On applique cela pour chaque matrice élémentaire  $M = E_{i,j}$ . Cela donne :  $0 = \text{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$ , puis  $A = 0$ .  $\square$

Comme  $O(n)$  est compact, son enveloppe convexe est aussi compacte d'après Carathéodory ( $[0, 1]^{n+1} \times K \rightarrow \text{conv}(K)$  est continue surjective). Une matrice orthogonale est de norme 2 égale à 1, et la boule unité est convexe par inégalité triangulaire. D'où  $\text{conv}(O(n)) \subset K$ . Pour l'autre sens, on va utiliser le théorème de Hahn Banach. Si  $M \in K \setminus \text{conv}(O(n))$ , on peut séparer strictement le convexe compact  $\{M\}$  du convexe fermé  $\text{conv}(O(n))$  par un hyperplan : il existe  $\varphi$  forme linéaire sur  $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$  telle que  $\sup_{O \in O(n)} \varphi(O) < \varphi(M)$ . Par contraposée, il suffit donc de montrer que pour toute forme linéaire  $\varphi$ , on a :

$$\varphi(M) \leq \sup_{O \in O(n)} \varphi(O)$$

D'après la proposition, cela revient à montrer cela pour  $\varphi = \text{tr}(A \cdot)$ .

On utilise la décomposition polaire :  $A = \Omega S$  avec  $\Omega \in O(n)$  et  $S \in S^+(n, \mathbb{R})$ . Soit  $(e_i)$  est une base orthonormée de vecteurs propres pour  $S$ .

Majorons donc  $\text{tr}(AM)$ , écrivons :

$$\text{tr}(AM) = \text{tr}(MA) = \sum_i \langle MAe_i, e_i \rangle = \sum_i \langle Ae_i, M^*e_i \rangle \leq \sum_i \|Ae_i\| \|M^*\|_2 \leq \sum_i \|Ae_i\|$$

car  $\|M^*\|_2 = \|M\|_2 \leq 1$ .

On a alors d'une part

$$\sum_i \|Ae_i\| = \sum_i \|Se_i\|$$

et d'autre part

$$\sup_{O \in O(n, \mathbb{R})} \text{tr}(AO) \geq \text{tr}(A\Omega^{-1}) = \text{tr}(\Omega^{-1}\Omega S) = \text{tr}(S) = \sum_i \langle Se_i, e_i \rangle = \sum_i \|Se_i\|$$

car  $e_i$  propre pour  $S$  à valeur propre positive.

On a donc bien  $\text{tr}(AM) \leq \sup_{O \in O(n)} \text{tr}(AO)$  pour tout  $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ . Donc la boule unité pour la norme 2 de  $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  est bien l'enveloppe convexe de  $O(n, \mathbb{R})$ .  $\square$

Leçons concernées : formes linéaires et hyperplans, endo remarquable d'un ev euclidien, matrices symétriques et réelles, convexité barycentres.