

Développement : Inégalité de Hoeffding.

RM

2022-2023

Référence :

1. Probabilités 2 Ouvrard

Énoncé :

Théorème (Inégalité de Hoeffding) 1 : Soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes, bornées $\mathbb{P}$ -p.s et centrées; on suppose que $|X_n| \leq c_n$ $\mathbb{P}$ -p.s, avec $c_n > 0$. On note $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2} \right).$$

Application 2 : Soit $\alpha > 0$. On suppose qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\sum_{j=1}^n c_j^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$. Alors on a que

$$\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} 0.$$

Résolution :

• Montrons en premier lieu que pour une variable aléatoire X réelle $\mathbb{P}$ -p.s bornée par 1 et centrée, on a que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}[e^{tX}] \leq e^{t^2/2}.$$

Soit t un réel quelconque. On remarque que pour tout $|x| \leq 1$, on a $\frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) = 1$ avec $\frac{1}{2}(1-x) \in [0, 1]$ et $\frac{1}{2}(1+x) \in [0, 1]$. De plus, on a aussi l'égalité $tx = \frac{1}{2}(1-x)(-t) + \frac{1}{2}(1+x)t$. De par la convexité de la fonction exponentielle, on en déduit

$$e^{tx} = e^{\frac{1}{2}(1-x)(-t) + \frac{1}{2}(1+x)t} \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^t$$

En appliquant le résultat à X (car $|X| \leq 1$), on obtient que

$$e^{tX} \leq \frac{1}{2}(1-X)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+X)e^t$$

On passe alors à l'espérance

$$\mathbb{E}[e^{tX}] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[(1-X)]e^{-t} + \frac{1}{2}\mathbb{E}[(1+X)]e^t$$

Mais comme X est centrée, on a que $\mathbb{E}[(1-X)] = 1$ et $\mathbb{E}[(1+X)] = 1$. On obtient alors

$$\mathbb{E}[e^{tX}] \leq \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t = ch(t)$$

Utilisons les séries entières. On a que $ch(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$. Or

$$2^n n! = 2.4 \dots (2n-2).2n \leq 2.3.4 \dots (2n-2).(2n-1).2n = (2n)!$$

On en déduit que $ch(t) \leq e^{t^2/2}$ et donc finalement on a

$$\mathbb{E}[e^{tX}] \leq e^{t^2/2}.$$

- Montrons que l'on a $\mathbb{E}[e^{tS_n}] \leq e^{t^2/2 \sum_{j=1}^n c_j^2}$.

Soit t quelconque. En appliquant l'inégalité qu'on vient de trouver à la variable aléatoire $\frac{X_n}{c_n}$, on a, pour tout t'

$$\mathbb{E}[e^{t' \frac{X_n}{c_n}}] \leq e^{t'^2/2}.$$

On pose alors $t' = tc_n$ pour obtenir

$$\mathbb{E}[e^{tX_n}] \leq e^{t^2 c_n^2/2}$$

De plus comme les X_n sont i.i.d, on a que les e^{tX_n} sont i.i.d et donc

$$\mathbb{E}[e^{tS_n}] = \mathbb{E}[e^{t \sum_{j=1}^n X_j}] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_j}].$$

On peut alors finalement dire que

$$\mathbb{E}[e^{tS_n}] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_j}] \leq \prod_{j=1}^n e^{t^2 c_j^2/2} = e^{t^2/2 \sum_{j=1}^n c_j^2}$$

Donc que l'on a bien $\mathbb{E}[e^{tS_n}] \leq e^{t^2/2 \sum_{j=1}^n c_j^2}$.

- Montrons ensuite pour $t, \varepsilon > 0$ que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + t^2/2 \sum_{j=1}^n c_j^2\right)$.

Soient $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. La fonction $x \mapsto \exp(tx)$ étant croissante, on a

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tS_n} > e^{t\varepsilon}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tS_n}]}{e^{t\varepsilon}} \quad (\text{Inégalité de Markov})$$

En utilisant l'inégalité précédente, on obtient

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \frac{e^{t^2/2 \sum_{j=1}^n c_j^2}}{e^{t\varepsilon}} = \exp\left(-t\varepsilon + t^2/2 \sum_{j=1}^n c_j^2\right)$$

- Montrons ensuite que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$.

On pose $a = \sum_{j=1}^n c_j^2$. La fonction $t \mapsto at^2/2 - t\varepsilon$ atteint son minimum pour $t = \varepsilon/a > 0$; ce minimum vaut $-\varepsilon^2/2a$. On applique donc l'égalité précédente pour $t = \varepsilon/a$ et on obtient bien

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$$

- montrons enfin que $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$.

Il suffit simplement de remarquer que $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n > \varepsilon)$. Il suffit alors d'appliquer l'inégalité précédente pour les $-X_n$ et on obtient de même $\mathbb{P}(-S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$.

On a donc bien que

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbb{P}(-S_n > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$$

Passons à l'application.

Soit $\varepsilon' > 0$ quelconque; on applique alors l'inégalité de Hoeffding pour $\varepsilon = n^\alpha \varepsilon'$, il vient

$$\mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha \varepsilon') \leq 2 \exp \left(-\frac{n^{2\alpha} \varepsilon'^2}{2 \sum_{j=1}^n c_j^2} \right)$$

Comme on a supposé que $\sum_{j=1}^n c_j^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha \varepsilon') \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon'^2 n^\beta}{2} \right)$$

Or la série de terme générale $\exp \left(-\frac{\varepsilon'^2 n^\beta}{2} \right)$ est convergente car $\exp \left(-\frac{\varepsilon'^2 n^\beta}{2} \right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc la série de terme générale $\mathbb{P}(|S_n| > n^\alpha \varepsilon')$ converge et d'après Borel Cantelli

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|S_n| > n^\alpha \varepsilon') \right) = 0$$

On applique ensuite à $\mathbb{Q}_*^+$ qui est dénombrable pour utiliser les propriétés de la mesure de probabilité, qui nous donne

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_*^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} (|S_n| > n^\alpha \varepsilon) \right) = 0$$

Par passage au complémentaire

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_*^+} \liminf_{n \rightarrow +\infty} (|S_n| \leq n^\alpha \varepsilon) \right) = 1$$

Or ceci nous affirme bien que la suite de terme générale $n^{-\alpha} S_n$ converge $\mathbb{P}$ -p.s vers 0.