

Développement : Processus de branchement de Galton-Watson.

RM

2022-2023

Référence :

1. Algèbre Probabilité de Xavier Gourdon

Énoncé :

Soit $(X_{n,i})_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}$ indépendantes identiquement distribuées de loi $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec $p_0 \in]0, 1[$ et d'espérance m . On définit la suite (Z_n) de la manière suivante

$$Z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i} \quad (Z_{n+1} = 0 \quad \text{si} \quad Z_n = 0).$$

Enfin on note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et $P_{ext} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0)$.

Si $m \leq 1$, $P_{ext} = 1$ et le processus s'éteint presque sûrement.

Si $m > 1$, $P_{ext} < 1$ et il y a une probabilité de survie non nul.

Énoncé du livre/plan :

1. On montre que $G_{Z_{n+1}} = G \circ G_{Z_n} \implies \pi_{n+1} = G(\pi_n)$.
2. Ensuite selon la valeur de m :
Pour $m \leq 1$, G n'a pas de point fixe sur $[0, 1[$.
Pour $m > 1$, G a un unique point fixe sur $]0, 1[$.
3. On en conclut alors :
Si $m \leq 1$, alors $P_{ext} = 1$.
Si $m > 1$, alors $P_{ext} = \alpha$ ou α point fixe de G .

Résolution :

On rappelle que les $X_{n,i}$ suivent la loi d'une variable aléatoire X de loi $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ et $\mathbb{E}[X] = m$.

On note $G = G_X$ la fonction génératrice de X .

1. On a alors d'après la définition de la fonction génératrice pour $z \in [0, 1]$

$$G_{Z_{n+1}}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_{n+1} = k) z^k$$

| Il est à noter que le rayon de convergence de la série génératrice est de au moins 1 car $G_Y(1) = 1$ pour toute v.a Y donc bien définie pour $z \in [0, 1]$.

De plus, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_{n+1} = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = j, X_{n,1} + \dots + X_{n,j} = k) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) \mathbb{P}(X_{n,1} + \dots + X_{n,j} = k) \quad \text{car } Z_n \perp X_{n,i}\end{aligned}$$

On réinjecte alors cela dans l'expression de $G_{Z_{n+1}}$, donc

$$\begin{aligned}G_{Z_{n+1}}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) \mathbb{P}(X_{n,1} + \dots + X_{n,j} = k) \right) z^k \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} + \dots + X_{n,j} = k) z^k \right) \quad \text{par fubini-tonelli car termes positifs} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) G_{X_{n,1} + \dots + X_{n,j}}(z) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = j) G^j(z) \quad \text{Par indépendance des } X_{n,i} \\ &= G_{Z_n}(G(z)) = G(G_{Z_n}(z)) \quad \text{par associativité de } \circ\end{aligned}$$

En effet, on a donc $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_0} \circ G \circ \dots \circ G \circ G$ avec n G composé. Or comme $G_{Z_0}(x) = x$, on a que $G_{Z_0} = Id$ commute avec tous les G .
Donc $G_{Z_{n+1}} = G \circ G_{Z_0} \circ \dots \circ G \circ G = G \circ G_{Z_n}$.
Comme $G_{Z_{n+1}}(0) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = \pi_{n+1}$, on en déduit grâce à la relation que l'on vient de trouvé que

$$\pi_{n+1} = G_{Z_{n+1}}(0) = G(G_{Z_n}(0)) = G(\pi_n)$$

On voit bien si la suite $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, alors elle sera un point fixe de G comme G est continue.

On peut noter que comme $G_{Z_0}(x) = x$, G_{Z_0} est donc dérivable et G aussi car X à une espérance. Donc par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on en déduit que G_{Z_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc Z_n admet une espérance.
On a $G'_{Z_n}(1) = G'_{Z_{n-1}}(1) G'(G_{Z_n}(1)) = m G'_{Z_{n-1}}(1)$ et on en déduit par récurrence que $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.

2. 1er cas ou $m \leq 1$:

Supposons que pour tout $n > 1$, $p_n = 0$. Alors comme $p_0 \in]0, 1[$ et p_n une loi de probabilité, on a $p_0 + p_1 = 1$. Comme $G(x) = p_0 + p_1 x$, on a

$$G(x) - x = p_0 + x(p_1 - 1) = p_0(1 - x)$$

et donc pour $x \in [0, 1[$, on a donc $G(x) - x > 0$ et donc G n'a pas de point fixe sur $[0, 1[$.

On suppose maintenant qu'il existe $n > 1$ tel que $p_n \neq 0$. Comme G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ on a $G'(x) = \sum_{n \geq 1} n p_n x^{n-1}$. Par hypothèse, on a donc que G' est strictement croissante sur $[0, 1]$, et donc G est strictement convexe sur $[0, 1]$.

Donc pour tout $x \in [0, 1[$, $G(x)$ est donc supérieur à sa tangente en 1, soit

$$G(x) > G'(1)(x - 1) + G(1) = m(x - 1) + 1 \geq (x - 1) + 1 \geq x$$

Donc $G(x) - x > 0$ sur $[0, 1[$ et donc G n'a pas de point fixe sur $[0, 1[$.

2ème cas ou $m > 1$:

Alors il existe $n > 1$ tel que $p_n \neq 0$.

En effet, sinon on a encore $G(x) = p_0 + p_1x$ et donc $G'(1) = p_1 = m < 1$, ce qui est absurde

Alors on a que $G' - 1$ est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Mais $G'(1) - 1 = m - 1 > 0$ et $G'(0) - 1 = p_1 - 1 < 0$.

Comme G' est continue, on en déduit grâce au TVI que il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que $G'(\beta) - 1 = 0$.

Mais comme $G' - 1$ est strictement croissante, on en déduit que $\forall x \in [0, \beta[, G'(x) - 1 < 0$ et $\forall x \in]\beta, 1], G'(x) - 1 > 0$.

Alors $x \mapsto G(x) - x$ est décroissante sur $[0, \beta[$ et $x \mapsto G(x) - x$ est croissante sur $]\beta, 1]$.

Or $G(\beta) - \beta < G(1) - 1 = 0$. De plus, $G(0) - 0 = p_0 > 0$.

On en déduit que $x \mapsto G(x) - x$ s'annule une unique fois sur $]0, \beta[$ car strictement décroissante et ne s'annule pas sur $]\beta, 1]$. Donc il existe $\alpha \in]0, \beta[$ tel que $G(\alpha) = \alpha$, le point fixe recherché.

3. On remarque que $Z_n = 0$ entraîne que $Z_{n+1} = 0$.

Donc $\{Z_n = 0\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événement croissante pour l'inclusion.

On en déduit que $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente car majorée par 1. On note l sa limite.

Or

$$P_{ext} = \mathbb{P}(\{\exists n \in \mathbb{N}, Z_n = 0\}) = \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{Z_n = 0\}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n = l$$

Comme $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$ et G continue, on a $l = G(l)$.

Donc si $m \leq 1$, le seul point fixe de G est 1 et donc $l = P_{ext} = 1$.

Si $m > 1$, alors soit α le point fixe de G sur $]0, 1[$.

On a alors par récurrence $\pi_n \leq \alpha$ (En effet, $\pi_0 = 0 \leq \alpha$ et si $\pi_n \leq \alpha$, alors $G(\pi_n) = \pi_{n+1} \leq G(\alpha) = \alpha$).

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n = l \leq \alpha$ et par unicité du point fixe, on en déduit que $\alpha = l = P_{ext}$.

Remarque 1 : Ici Z_n modélise le nombre d'individus à la génération n et $X_{n,i}$ le nombre de descendant de l'individu i à la n -ième génération, π_n la probabilité d'extinction à la génération n et P_{ext} la probabilité d'extinction de la population.

On étudie alors la descendance d'un seul individu et donc on pose $Z_0 = 1$.

Le développement nous dit alors que si la moyenne de descendant pour chaque individus est inférieur ou égale à 1, alors la lignée va s'éteindre presque surement, et si la moyenne est plus grande que 1, alors il y a une probabilité non nul que la lignée survive.