

Développement : Théorème de Liapounov.

RM

2022-2023

Référence :

1. Oral à l'agreg

Énoncé :

Théorème 1 : Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On suppose que la matrice Df_0 (matrice de la différentielle de f en 0) a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative. Alors 0 est un point d'équilibre stable du système : pour tout y_0 suffisamment proche de 0, la solution maximale $y(t)$ est bien définie sur $[0, +\infty[$ et tend exponentiellement vite vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

On se propose dans ce développement de démontrer ce théorème fondamental dans l'étude des systèmes dynamiques. L'idée est de s'intéresser d'abord au cas du problème linéarisé $z' = Az$ avec $A = Df_0$ et $z(0) = y_0$ et d'en déduire le résultat dans le cas générale en s'y ramenant.

On rappelle quelque notions avant:

Lemme 2 : Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels que, pour tout t positif ou nul, on ait $\|e^{tA}\| \leq \lambda e^{-\alpha t}$.

Démonstration : D'après le théorème de Dunford, il existe $D, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = D + N$, avec D diagonalisable, N nilpotent et $DN = ND$. Comme D et N commutent, alors on a $e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$, et D et N sont cotrigonalisable :

En effet, c'est un théorème, si deux matrices A et B commutent et sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors elles sont cotrigonalisables.

il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $D = PTP^{-1}$, où T est une matrice triangulaire supérieure avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale, et $P^{-1}NP$ est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale car N est nilpotente. Ainsi $P^{-1}AP = P^{-1}DP + P^{-1}NP$ est une matrice triangulaire supérieure avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale, qui sont donc les valeurs propres de A .

Comme D est diagonalisable, on note Q sa matrice de passage tel que $D = QD_{diag}Q^{-1}$, où la matrice D_{diag} est une matrice diagonale avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale.

Par hypothèse, il existe $c > 0$ tel que $Re(\lambda_i) \leq -c$ pour tout i . En notant $|||\cdot|||$ la norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$, on a pour tout $t \geq 0$:

$$|||Q^{-1}e^{tD}Q||| = |||\text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})||| \leq \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} e^{tRe(\lambda_i)} \leq e^{-ct}$$

La norme subordonnée de la norme infinie est le sup de la somme des lignes au module, donc comme elle est diagonale, la somme des lignes au module donne $|e^{t\lambda_i}|$ pour chaque ligne, et comme $|e^{t\lambda_i}| = e^{tRe(\lambda_i)}$, on en déduit l'inégalité.

L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ étant de dimension finie, les normes sont équivalentes et donc on a également $\|P^{-1}e^{tD}P\| = O(e^{-ct})$. D'autres part, si on note n l'ordre de nilpotence de N , on a $e^{tN} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k N^k / k! = o(t^n)$. Ainsi, comme $\|e^{tA}\| = \|e^{tN}e^{tD}\|$, on a donc $\|e^{tA}\| = o(t^n e^{-ct}) = O\left(e^{\frac{-ct}{2}}\right)$, et donc il existe $\lambda > 0$ tel que $\|e^{tA}\| \leq \lambda e^{\frac{-ct}{2}}$ et on pose $\alpha = c/2$ pour avoir le résultat. $\square$

Théorème 3 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les solutions maximales de $X' = AX$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont de la forme $z(t) = Ce^{tA}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Théorème (Sortie de tout compact) 4 : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert connexe d'un espace de dimension finie E et f une application de $I \times \Omega$ vers E continue et localement lipschitzienne en sa deuxième variable. Soit z une solution maximale de $y' = f(t, y)$. On note J son intervalle ouvert de définition. Si $\sup J < \sup I$, alors z explose en temps fini, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subseteq \Omega$, il existe $T_K \in J$ tel que pour tout $t \in [T_K, \sup J[$, $z(t) \in \Omega \setminus K$.

On en déduit qu'il suffit de montrer qu'une solution maximale est bornée pour montrer qu'elle est globale.

Résolution :

On définit la forme bilinéaire symétrique

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle dt.$$

Cette application est bien définie, car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant le Lemme 2 (avec la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ comme norme d'algèbre), on a

$$|\langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle| \leq \|e^{tA}x\| \|e^{tA}y\| \leq K^2 e^{-2at} \|x\| \|y\|$$

En effet, une norme subordonnée est toujours sous-multiplicative et donc une norme d'algèbre. Car:

$$\| \|AB\| \| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \sup_{y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \| \|A\| \| \| \|B\| \|$$

et donc l'intégrale considérée est absolument convergente. Montrons maintenant que la forme B est définie positive. Soit $x \in \mathbb{R}^n$,

$$B(x, x) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle dt = \int_0^{+\infty} \|e^{tA}x\|^2 dt \geq 0$$

Par continuité et positivité de $t \mapsto \|e^{tA}\|^2$, si $B(x, x) = 0$, alors pour tout $t \geq 0$, $e^{tA}x = 0$. Ainsi en particulier $x = 0$ pour $t = 0$. On en déduit que B est une forme bilinéaire définie positive et on peut définir la forme quadratique q associée à B qui définit alors une norme :

$$\|x\|_q = \sqrt{q(x)} = \sqrt{B(x, x)}$$

Comme $\|\cdot\|_q$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante $u_q > 0$ telle que $u_q \|x\|_q \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par équivalence des normes en dimension finie. Soit y une solution maximal de l'équation différentielle $y' = f(y)$ définie sur $]c, d[$ et contenant 0. Montrons que $(q \circ y)'(t) \leq -\beta \|y(t)\|_q$ pour tout $t \in]c, d[$ dès que $y(t)$ est petit.

On définit $r(x) = f(x) - Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned} (q \circ y)'(t) &= D_{q_{y(t)}}(y'(t)) && \text{Formule de différentiation des fonctions composées} \\ &= B(y(t), y(t))' \\ &= 2B(y(t), y'(t)) && \text{Différentielle d'une forme quadratique} \\ &= 2B(y(t), Ay(t)) + 2B(y(t), r(y(t))) \text{ car } y'(t) = f(y(t)) = r(y(t)) + Ay(t). \end{aligned}$$

Montrons que $2B(y(t), Ay(t)) = -\|y(t)\|^2$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, d'après le lemme précédent, on en déduit que

$$\begin{aligned} 2B(x, Ax) &= 2 \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle dt \\ &= [\|e^{tA}x\|^2]_0^{+\infty} = -\|x\|^2. \text{ car } \|e^{tA}x\|^2 \leq K^2 e^{-2at} \|x\|^2 \end{aligned}$$

Comme f est différentiable en 0, alors $f(x) = f(0) + Df_0(x) + o(\|x\|)$ lorsque x tend vers 0. Par équivalence des normes, $f(x) = f(0) + Df_0(x) + o(\|x\|_q)$ lorsque x tend vers 0. Comme $f(0) = 0$, alors $r(x) = Df_0(x) - Ax + o(\|x\|_q) = o(\|x\|_q)$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\|_q \leq \alpha \Rightarrow \|r(x)\|_q \leq \varepsilon \|x\|_q$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$|B(y(t), r(y(t)))| \leq \|y(t)\|_q \|r(y(t))\|_q \leq \varepsilon \|y(t)\|_q^2$$

dès que $\|y(t)\|_q \leq \alpha$. Ainsi, pour ε tel que $\beta = u_q^2 - 2\varepsilon > 0$ et en supposant $\|y(t)\|_q \leq \alpha$, on a

$$\begin{aligned} (q \circ y)'(t) &= -\|y(t)\|^2 + 2B(y(t), r(y(t))) \\ &\leq (-u_q^2 + 2\varepsilon) \|y(t)\|_q^2 \\ &\leq -\beta \|y(t)\|_q^2. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\|y_0\|_q < \alpha$ et montrons que $\|y(t)\|_q < \alpha$ pour tout $t \in [0, d[$. Supposons par l'absurde qu'il existe $t \in]0, d[$ tel que $\|y(t)\|_q \geq \alpha$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut considérer le plus petit tel $t : t_0 = \inf\{t \in [0, d[, \|y(t)\|_q = \alpha\}$ de sorte que pour tout $t < t_0, \|y(t)\|_q < \alpha$ et $q(y(t))' \leq -\beta q(y(t))$. Ainsi, par continuité de la dérivée, en faisant tendre t vers t_0 par valeurs inférieures, on en déduit que

$$(q \circ y)'(t_0) \leq -\beta q(y(t_0)) = -\beta \alpha^2 < 0.$$

Par conséquent il existe un voisinage de t_0 de sorte que l'application $t \mapsto q(y(t))$ soit strictement décroissante. Pour un t légèrement inférieur à t_0 , on a donc $q(y(t)) > q(y(t_0)) = \alpha^2$ par strict décroissance. Or comme $t < t_0, q(y(t)) < \alpha^2$ ce qui est absurde. On en déduit que $\|y(t)\|_q < \alpha$ pour tout $t \in [0, d[$. Par conséquent y n'explose pas en temps fini et on déduit que y est définie sur $\mathbb{R}^+$. De plus on en déduit que

$$(q \circ y)'(t) \leq -\beta q(y(t))$$

pour tout $t \geq 0$. On en déduit que

$$e^{\beta t}((q \circ y)'(t) + \beta q(y(t))) \leq 0$$

et comme $(e^{\beta t} q(y(t)))'(t) = e^{\beta t}((q \circ y)'(t) + \beta q(y(t)))$, alors $(e^{\beta t} q(y(t)))'(t) \leq 0$. Ainsi la fonction $t \mapsto e^{\beta t} q(y(t))$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et

$$e^{\beta t} q(y(t)) \leq e^{\beta 0} q(y(0)) = q(y_0).$$

Ainsi

$$\|y(t)\|_q \leq e^{-\beta/2} \|y_0\|_q$$

pour tout $t \geq 0$ et la convergence vers 0 est donc exponentielle.