

Développement : Projection sur un convexe fermé

RM

2022-2023

Référence

1. Orlaux X-ENS analyse 3 p 152

Énoncé :

Soit $\mathcal{C}$ un convexe fermé (non vide) de H . Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $y \in \mathcal{C}$, tel que $d(x, \mathcal{C}) = \inf_{z \in \mathcal{C}} \|x - z\| = \|x - y\|$ et on appelle le point $y = p_{\mathcal{C}}(x)$ le projeté orthogonale de x sur $\mathcal{C}$. On a ainsi

$$\forall z \in \mathcal{C}, \quad \|x - p_{\mathcal{C}}(x)\| \leq \|x - z\|.$$

Il vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall z \in \mathcal{C}, \operatorname{Re}\langle p_{\mathcal{C}}(x) - x, p_{\mathcal{C}}(x) - z \rangle \leq 0$.
- l'application p est 1-lip.

Énoncé du livre/plan :

1. On vérifie l'existence et l'unicité du point y .
2. Démonstration de la 1-ère propriété.
3. Démonstration de la deuxième propriété.

Résolution :

1. On pose $d = d(x, \mathcal{C}) = \inf_{h \in \mathcal{C}} \|x - h\|$.

Par définition de la borne inférieure, il existe une suite $(h_n)_{n \leq 1}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que, pour tout n , $\|h_n - x\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$.

Cela vient du fait que pour $\epsilon > 0$, alors $d^2 + \epsilon$ ne minore pas l'ensemble $\{\|h - x\|^2, h \in \mathcal{C}\}$. On peut donc trouver h_ϵ telle que $\|h_\epsilon - x\|^2 \leq d^2 + \epsilon$. On prends alors $\epsilon = \frac{1}{n}$ et on construit la suite (h_n) correspondante.

On a, pour tout $(z, z') \in H^2$,

$$\|z - z'\|^2 = 2\|z\|^2 + 2\|z'\|^2 - \|z + z'\|^2$$

On en déduit pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\begin{aligned} \|h_n - h_p\|^2 &= 2\|h_n - x\|^2 + 2\|h_p - x\|^2 - \|h_n + h_p - 2x\|^2 \\ &= 2\|h_n - x\|^2 + 2\|h_p - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(h_n + h_p) - x\right\|^2 \\ &\leq 2d^2 + \frac{2}{n} + 2d^2 + \frac{2}{p} - 4d^2 \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{p} \end{aligned}$$

Car $\mathcal{C}$ convexe, donc $\frac{h_n+h_p}{2}$ est dans $\mathcal{C}$.

On en déduit que la suite (h_n) est de Cauchy, donc convergente car H est complet. On note y sa limite. Comme $\mathcal{C}$ est fermé, $y \in \mathcal{C}$. Par continuité de la norme, on obtient alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_n - x\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} d^2 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \|y - x\|^2 \leq d^2 \Leftrightarrow \|y - x\| = d = d(x, \mathcal{C})$$

Montrons l'unicité de y .

Supposons qu'il existe $y' \neq y$ dans $\mathcal{C}$ tel que $d = \|x - y\| = \|x - y'\|$. Comme $\mathcal{C}$ est convexe, on a que $\frac{y+y'}{2}$ est dans $\mathcal{C}$ et on a alors :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}(y + y') - x \right\|^2 &= \left\| \frac{1}{2}(y - x) - \frac{1}{2}(x - y') \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\|y - x\|^2 + \|y' - x\|^2) - \frac{1}{4}\|y - y'\|^2 \\ &= d^2 - \frac{1}{4}\|y - y'\|^2 < d^2 \end{aligned}$$

Ce qui est donc absurde. On a alors que $y = y'$ et donc y est unique.

2. Supposons que y est le projeté de x . Considérons $z \in \mathcal{C}$. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $(1 - \lambda)y + \lambda z \in \mathcal{C}$, donc

$$\|x - (1 - \lambda)y - \lambda z\| = \|x - y + \lambda(y - z)\| \geq \|x - y\|$$

En développant on en déduit

$$\|x - y\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}(\langle x - y, y - z \rangle) + \lambda^2 \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

On obtient, pour $\lambda \in]0, 1]$, $2\operatorname{Re}(\langle x - y, y - z \rangle) + \lambda^2 \|y - z\|^2 \geq 0$, puis en faisant tendre λ vers 0, $\operatorname{Re}(\langle x - y, y - z \rangle) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\langle y - x, y - z \rangle) \leq 0$.

Réciproquement, si cette condition est réalisée, on a, pour tout $z \in \mathcal{C}$,

$$\|z - x\|^2 = \|(y - x) - (y - z)\|^2 = \|y - x\|^2 + \|y - z\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle y - x, y - z \rangle) \geq \|y - x\|^2$$

On a donc bien montré que la distance de x à n'importe quel éléments de $\mathcal{C}$ est bien plus petite que la distance de x à y , on a donc bien que y est le projeté orthogonal de x sur $\mathcal{C}$.

3. Soit $(x, x') \in H^2$, $y = p(x)$, $y' = p(x')$.

On a, d'après la question précédente, $\langle y - x, y - y' \rangle \leq 0$ et $\langle y' - x', y' - y \rangle \leq 0$. On en déduit, en additionnant, $\langle y - y', y - x + x' - y' \rangle \leq 0$ et donc $\|y - y'\|^2 \leq \langle x - x', y - y' \rangle$.

Or avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz on en déduit

$$\|y - y'\|^2 \leq \|x - x'\| \|y - y'\|$$

et donc $\|y - y'\| \leq \|x - x'\| \Leftrightarrow \|p(x) - p(x')\| \leq \|x - x'\|$. Ainsi l'application p est 1-lipschitzienne et donc continue.

Application :

Théorème de représentation de Riez : Soit f une forme linéaire continue sur H . Alors il existe un unique vecteur $a \in H$ tel que, pour tout x de H , $f(x) = \langle a, x \rangle$.

Lemme 1 : Si $\mathcal{C}$ est un sous-espace fermé de H , alors pour tout $x \in H$, $x - p(x) \in \mathcal{C}^\perp$ et $H = \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}^\perp$. De plus, p est linéaire.

Démonstration : Soit $x \in H, y = p(x)$. Si $z \in \mathcal{C}$, alors $t = y - z \in \mathcal{C}$ (car on a supposé $\mathcal{C}$ un sous-espace) donc d'après la question 2, $\operatorname{Re}(\langle y - x, y - t \rangle) = \operatorname{Re}(\langle y - x, z \rangle) \leq 0$.

Comme $-z \in \mathcal{C}$, on a aussi $Re(\langle y - x, -z \rangle) \leq 0$ et donc $Re(\langle y - x, z \rangle) = 0$. Comme $iz \in \mathcal{C}$ et $-iz \in \mathcal{C}$, on a alors de la même manière que $Im(\langle y - x, z \rangle) = 0$. On en déduit que $\langle y - x, z \rangle = 0$. Cela est vrai pour tout $z \in \mathcal{C}$ donc $x - p(x) = x - y$ appartient à $\mathcal{C}^\perp$. En écrivant $x = p(x) + x - p(x)$, on voit que $H = \mathcal{C} + \mathcal{C}^\perp$. De plus, comme $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}^\perp = \{0\}$, on a que la somme est directe. On remarque alors que l'application p correspond à la projection de x sur $\mathcal{C}$ parallèlement à $\mathcal{C}^\perp$, elle est donc bien linéaire.

Traisons d'abord l'existence. Si f est l'application nulle, le vecteur $a = 0$ convient. Sinon $Ker f$ est un sous-espace strict de H , fermé car f est continue.

D'après la question précédente, on a alors que $H = Ker f \oplus (Ker f)^\perp$ et $(Ker f)^\perp \neq \{0\}$ car $Ker f \neq H$ car f non nulle. Soit $h \in (Ker f)^\perp$, non nul.

Alors $f(h) \neq 0$ (car sinon h est dans $Ker f$ et c'est impossible car ils sont en somme directe et h est non nul), et pour tout $x \in H$, $x - \frac{f(x)}{f(h)}h \in Ker f$. On a donc

$$0 = \langle h, x - \frac{f(x)}{f(h)}h \rangle = \langle h, x \rangle - \frac{f(x)}{f(h)}\|h\|^2$$

ce qui équivaut à

$$f(x) = \langle \frac{f(h)}{\|h\|^2}h, x \rangle$$

On en conclut que le vecteur $a = \frac{f(h)}{\|h\|^2}h$ convient.

Enfin, pour l'unicité, soit $a' \in H$ tel que, pour tout $x \in H$, $f(x) = \langle a, x \rangle = \langle a', x \rangle$ et donc $\langle a - a', x \rangle = 0$. En particulier $\|a - a'\|^2 = 0$, et donc $a = a'$.