

Développement : Méthode QR .

RM

2022-2023

Référence :

1. Analyse numérique et matriciel Ciarlet

Énoncé :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que ses valeurs propres sont de modules distincts classé de sorte que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et P^{-1} possède une factorisation LU . Alors la suite $(A_k)_{k \geq 1}$ construite de la manière suivante

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_{k+1} = R_k Q_k \text{ où } A_k = Q_k R_k \text{ est la décomposition } QR \text{ de } A_k \end{cases} \quad .$$

est telle que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} (A_k)_{i,i} &= \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} (A_k)_{i,j} &= 0, \quad 1 \leq j < i \leq n \end{aligned}$$

Résolution :

On montre d'abord deux propriétés utiles : $A_{k+1} = Q_k^* A Q_k$ et $A^k = Q_k R_k$ avec $Q_k = Q_1 Q_2 \dots Q_k$, $R_k = R_1 \dots R_k R_1$.

Pour la première, on a $R_k = Q_k^* A_k$ et donc $A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k$ et par récurrence comme $A_1 = A$, on a bien

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= Q_k^* \dots Q_2^* Q_1^* A_1 Q_1 Q_2 \dots Q_k \\ &= (Q_1 Q_2 \dots Q_k)^* A (Q_1 Q_2 \dots Q_k) \\ &= Q_k^* A Q_k \end{aligned}$$

Pour la deuxième

$$\begin{aligned} A^k &= (Q_1 R_1)^k \\ &= Q_1 (R_1 Q_1) (R_1 Q_1) \dots (R_1 Q_1) R_1 \\ &= Q_1 A_2 \dots A_2 R_1 \\ &= Q_1 Q_2 (R_2 Q_2) \dots (R_2 Q_2) R_2 R_2 \\ &= Q_1 Q_2 \dots Q_k R_k \dots R_2 R_1 \\ &= Q_k R_k \end{aligned}$$

L'idée est utilisant la factorisation LU de la matrice P^{-1} , on va par ailleurs obtenir une autre factorisation QR des mêmes matrices A^k , et la comparaison des deux factorisations conduira à une expression des matrices Q_k commode pour leur étude.

On note $P = QR$ et $P^{-1} = LU$ les factorisations QR et LU . Comme A est inversible

$$A^k = PD^kP^{-1} = QR(D^kLD^k)D^{-k}U$$

Comme L est triangulaire inférieure avec $L_{i,i} = 1$ on a

$$(D^kLD^{-k})_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \\ (\frac{\lambda_i}{\lambda_j})^k L_{i,j} & \text{si } i > j \end{cases}$$

Comme $|\lambda_j| > |\lambda_i|$, on en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (D^kLD^{-k}) = I$. On pose alors $D^kLD^{-k} = I + F_k$ avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} F_k = 0$.

On a alors

$$R(D^kLD^{-k}) = (I + RF_kR^{-1})R$$

Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} F_k = 0$, on a que pour un k assez grand, $\|RF_kR^{-1}\|_2 < 1$ et donc les matrices $I + RF_kR^{-1}$ sont inversibles. Elles admettent alors une unique décomposition QR

$$I + RF_kR^{-1} = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k \text{ avec } (\tilde{R}_k)_{i,i} > 0, \quad i \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

Si une matrice M est inversible, on a que le R dans sa décomposition QR est triangulaire supérieur à coefficients diagonaux strictement positifs, car sinon on a $\det(M) = \det(Q)\det(R) = 0$ ce qui est absurde

Les matrices $\tilde{Q}_k$ étant unitaires, la suite $(\tilde{Q}_k)$ est bornée (car $\|\tilde{Q}_k\|_2 = \sqrt{\rho(\tilde{Q}_k^* \tilde{Q}_k)} = \sqrt{\rho(I)} = 1$). On peut donc en extraire une suite, soit $(\tilde{Q}_{\varphi(k)})$, qui converge vers une matrice $\tilde{Q}$, également unitaire. Comme

$$R_{\varphi(k)} = \tilde{Q}_{\varphi(k)}^* (I + RF_{\varphi(k)}R^{-1}).$$

on en déduit que la suite extraite $(\tilde{R}_{\varphi(k)})$ converge vers une matrice $\tilde{R}$, également triangulaire supérieur, avec $\tilde{R}_{i,i} \geq 0$, $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. En passant à la limite pour la suite extraite considérée, on obtient

$$I = \tilde{Q} \tilde{R}$$

ce qui impose $\tilde{R}_{i,i} > 0$. D'après l'unicité d'une telle factorisation QR , on en déduit que $\tilde{Q} = \tilde{R} = I$. Le même raisonnement fonctionne pour n'importe quel suite extraite, donc il y a une unique valeur d'adhérence pour la suite $(\tilde{Q}_k)$ et bornée, elle converge alors vers cette valeur d'adhérence, donc

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{Q}_k = I$. On a alors aussi que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{R}_k = I$.

On a alors $R(D^kLD^{-k}) = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k R$ et donc

$$A^k = (Q\tilde{Q}_k)(\tilde{R}_k R D^k U) = \mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k.$$

Or la matrice $Q\tilde{Q}_k$ étant unitaire, et la matrice $\tilde{R}_k R D^k U$ étant triangulaire supérieure (comme produit de matrice de ce type), et A^k étant inversible, c'est une décomposition QR . D'après une remarque sur la décomposition QR si $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ alors $Q_1 = Q_2 D$ ou D diagonale ou tous ces éléments sont de module 1. Alors il existe pour tout entier k une matrice D_k diagonale avec $|D_{i,i}| = 1$, $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ telle que

$$\mathcal{Q}_k = Q\tilde{Q}_k D_k.$$

Ensuite on sait que $A_{k+1} = \mathcal{Q}_k^* A \mathcal{Q}_k$ et $A = P D P^{-1} = Q R D R^{-1} Q^{-1}$. Avec la relation précédente, on en déduit que

$$A_{k+1} = D_k^* \tilde{Q}_k^* R D R^{-1} \tilde{Q}_k D_k.$$

On sait que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{Q}_k = I$, et donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\tilde{Q}_k^* R D R^{-1} \tilde{Q}_k) = R D R^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \cdots & \times \\ & \lambda_2 & \cdots & \times \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On pose $\mathcal{D}_k = \tilde{Q}_k^* R D R^{-1} \tilde{Q}_k$. On obtient

$$A_{k+1_{i,j}} = \overline{D_{k_{i,i}}} D_{k_{j,j}} \mathcal{D}_{k_{i,j}}$$

Donc

$$A_{k+1_{i,i}} = \mathcal{D}_{k_{i,i}}.$$

car $|D_{k_{i,i}}| = 1, i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{D}_k = R D R^{-1}$, on a les résultats voulus.