

Développement : Théorème de Burnside

RM

2022-2023

Référence

1. Orlaux X-ENS tome 2 algèbre p 185

Énoncé :

Théorème de Burnside : Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (c'est-à-dire qu'il existe un entier N tel que $A^N = I$ pour toute matrice A du groupe). Alors G est fini.

Énoncé du livre/Plan :

1. Démonstration du déterminant de Vandermonde.
2. Démonstration du lemme
3. On pose $(M_i)_{1 \leq i \leq m} \in G^m$ une base de $Vect(G)$ et $f : G \mapsto \mathbb{C}^m$ l'application qui à $A \in G$ associe $(Tr(Am_i))_{1 \leq i \leq m}$. On montre que si $f(A) = f(B)$ alors $AB^{-1} - I$ est nilpotente.
4. On montre que f est injective si toutes les matrices de G sont diagonalisables.
5. Conclusion du théorème

Résolution :

Lemme (Déterminant de Vandermonde) 1 : Pour $n \geq 2$ et pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, on note

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Alors on a

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Démonstration : Par récurrence sur n . Pour $n = 2$, la formule est vraie.

Supposons le résultat vrai pour n éléments et soient $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^n$. On définit la fonction $P(X)$ par

$$P(X) = V(a_1, \dots, a_n, X) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \\ 1 & X & \cdots & X^n \end{vmatrix}$$

On remarque grâce à un développement par rapport à la dernière ligne que le polynôme P est un polynôme en X de degré au plus n . Par propriété du déterminant, on a que $P(a_i) = 0$ pour tout

$i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ car deux lignes identiques. On a donc n racines pour un polynôme de degré au plus n , on en déduit que $P(X) = a \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ ou $a \in \mathbb{K}$.

Or d'après le développement par rapport à la dernière ligne, le coefficient devant X^n est $V(a_1, \dots, a_n)$. On a donc $a = V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ par hypothèse de récurrence. On obtient finalement

$$P(a_{n+1}) = V(a_1, \dots, a_{n+1}) = V(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^n = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i)$$

Lemme 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Tr(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est nilpotente.

Démonstration : Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$. Raisonnons par l'absurde et supposons A non nilpotente.

Alors A possède des valeurs propres (complexes) non nulles. On les note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ avec $r \geq 1$ et $n_1, \dots, n_r$ leur multiplicités respectives. Dans $\mathbb{C}$, nous savons que A est semblable à une matrice triangulaire car le polynôme caractéristique est toujours scindé sur $\mathbb{C}$.

La diagonale de cette matrice triangulaire contiennent les valeurs propres autant de fois que leur multiplicité. En élevant à la puissance k , on obtient une matrice triangulaire semblable à A^k avec donc pour $k \geq 1$

$$Tr(A^k) = n_1 \lambda_1^k + \dots + n_r \lambda_r^k$$

On peut écrire la relation matricielle de cette égalité pour k variant de 1 à r , on obtient que $(n_1, \dots, n_r)$ est solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$$

En calculant le déterminant de cette matrice, on remarque que l'on va pouvoir factoriser chaque ligne par λ_i et que il va nous rester le déterminant d'une matrice de vandermonde. Cela donne

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^r & \lambda_2^r & \dots & \lambda_r^r \end{vmatrix} = \lambda_1 \dots \lambda_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

Car on a supposé les λ_i différent.

On a alors un système de cramer car le déterminant est non nulle. Il y a alors une unique solution et comme $n_1 = \dots = n_r = 0$ est solution, c'est la seule.

Absurde d'après l'hypothèse de départ.

On a donc bien que toutes les valeurs propres de A sont nuls et donc A est nilpotente.

2. Utilisons la linéarité de la trace. Soit $M \in Vect(G)$.

Alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ dans $\mathbb{C}$ telle que $M = \alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_m M_m$. Donc

$$\begin{aligned} Tr(AM) &= Tr(\alpha_1 AM_1 + \dots + \alpha_m AM_m) \\ &= \alpha_1 Tr(AM_1) + \dots + \alpha_r Tr(AM_r) \\ &= \alpha_1 Tr(BM_1) + \dots + \alpha_r Tr(ABM_r) \text{ par hypothèse} \\ &= Tr(\alpha_1 BM_1 + \dots + \alpha_m BM_m) \\ &= Tr(BM) \end{aligned}$$

Ceci est donc en particulier vrai pour $M \in G$.

Posons $D = AB^{-1}$. Cette matrice est dans G car G un groupe et donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$Tr(D^k) = Tr(AB^{-1}D^{k-1}) = Tr(BB^{-1}D^{k-1}) = Tr(D^{k-1})$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $Tr(D^k) = Tr(I_n) = n$.
Ainsi, pour $k \geq 1$, comme D commute avec I_n

$$Tr(D - I_n)^k = Tr\left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i D^{k-i}\right) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i Tr(D^{k-i}) = n \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = n(1-1)^k = 0$$

On en déduit du lemme introduit initialement que $D - I_n = AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.

3. Si les matrices de G sont diagonalisables alors D est diagonalisable et la matrice $D - I$ posée précédemment l'est aussi. Or le seul endomorphisme nilpotent et diagonalisable est l'endomorphisme nulle.

Donc $D = I$ et $A = B$. On a donc bien que f est injective.

4. Prenons G un sous groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ d'exposant N .

Donc le polynôme $X^N - 1$ est annulateur pour toutes les matrices de G , et ce polynôme est en plus scindé à racines simples (les racines N -ième de l'unité). On en déduit que toutes les matrices de G sont diagonalisables. On en déduit que l'application f définie avant est bien injective.

On pose $X = \{Tr(A), A \in G\}$. Alors on a que l'image de f est incluse dans X^m car $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ et $A \in G$, $AM_i \in G$ et f est injective. On a même $|G| \leq |X|^m$.

Or comme les valeurs propres des éléments de G appartiennent à l'ensemble finie des racines N -ième de l'unité, on en déduit que $Tr(A)$ est une somme de m racines N -ième de l'unité et donc $|X| \leq N^m$. Donc X est fini et donc G aussi