

POLYNÔMES ET FONCTIONS DE HERMITE

1 Résultats du plan (admis)

PROPOSITION 1. [ELA] Soit $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. L'espace

$$L_\omega^2 = \left\{ f \text{ mesurable, } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \omega(x) dx < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \omega(x) dx$ est un espace de Hilbert.

DÉFINITION 2. [ELA] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Hermite est

$$H_n : x \mapsto (-1)^n e^{x^2} D^n (e^{-x^2}) \text{ où } D = \frac{d}{dx}.$$

PROPOSITION 3. [ELA] $\forall n \in \mathbb{N}, H_{n+1} = (2x - D)H_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, DH_n = 2nH_{n-1}$.

2 Famille orthogonale totale

PROPOSITION 4. [ELA] $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale et totale dans L_ω^2 .

Preuve. Famille orthogonale – Si $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \langle H_m, H_n \rangle_\omega &= \int_{\mathbb{R}} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx \\ &\stackrel{n \text{ IPP}}{=} \int_{\mathbb{R}} H_m^{(n)}(x) e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

(les crochets sont nuls car, pour tout polynôme Q , $Q(x)e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$). Si $m < n$, on a donc $\langle H_m, H_n \rangle_\omega = 0$ car, P_m étant de degré m , $H_m^{(n)} = 0$. Et si $m = n$, comme le coefficient dominant de H_n est 2^n , on a $H_n^{(n)}(x) = 2^n n!$, donc

$$\langle P_n, P_n \rangle_\omega = 2^n n! \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une famille orthogonale pour le produit scalaire considéré.

Famille totale – Soit $f \in L^2(\mathbb{R}, \omega)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle f, H_n \rangle_\omega = 0$. Alors, pour tout polynôme P , on a $\langle f, P \rangle_\omega = 0$. En effet, les H_n forment une famille échelonnée en degrés, donc une base de $\mathbb{R}[X]$.

Montrons que $\mathcal{F}(e^{-x^2} f) = 0$: par injectivité de la transformée de Fourier sur L^2 , on obtiendra alors $f = 0$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-x^2} f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^n}{n!} x^n \right) e^{-x^2} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^n}{n!} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-x^2} dx \right)}_{=0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat modulo une justification de l'interversion série-intégrale.

Justifions cette interversion : on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-i\xi x)^n}{n!} f(x) e^{-x^2} \right| dx &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi x|^n}{n!} e^{-x^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{|\xi x|} e^{-x^2} dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{2|tx|} e^{-x^2} dx \right)^{1/2} \\ &\quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

donc le théorème de Fubini s'applique. □

3 Fonctions de Hermite

PROPOSITION 5. [HILB] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n : x \mapsto e^{-x^2/2} H_n(x)$ la $n^{\text{ème}}$ fonction de Hermite. Alors,

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (-D^2 + x^2)h_n = (2n + 1)h_n.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}(h_n) = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n.$

Ainsi, les h_n diagonalisent l'opérateur associé à l'oscillateur harmonique quantique 1D, et la transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$.

Preuve. Oscillateur harmonique quantique – Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} Dh_n &= D(e^{-x^2/2} H_n) = -xe^{-x^2/2} H_n + e^{-x^2/2} \underbrace{DH_n}_{=2nH_{n-1}} \\ &= -xh_n + 2nh_{n-1}, \end{aligned}$$

donc

$$(x + D)h_n = 2nh_{n-1}. \quad (3.1)$$

D'autre part, on sait que $(2x - D)H_n$. En multipliant par $e^{-x^2/2}$, cela donne

$$\begin{aligned} h_{n+1} &= 2xh_n - e^{x^2/2} DH_n \\ &= 2xh_n - (Dh_n - (-xe^{-x^2/2})H_n) \\ &= (x - D)h_n, \end{aligned}$$

donc

$$(x - D)h_n = h_{n+1}. \quad (3.2)$$

En rapprochant (3.1) et (3.2), on trouve

$$\underbrace{(x + D)(x - D)}_{=-D^2 + x^2 + I} h_n = 2(n + 1)h_n,$$

soit encore

$$(-D^2 + x^2)h_n = (2n + 1)h_n.$$

REMARQUE 6. Ce résultat est important car il assure non seulement que les h_n sont des états propres de l'oscillateur harmonique quantique, mais aussi que ce sont les seuls dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, car ils forment une famille totale de $L^2(\mathbb{R})$. En effet, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifie $(-D^2 + x^2 - \lambda)\varphi =$

0 avec $\lambda \neq 2\mathbb{N} + 1$, alors puisque $-D^2 + x^2$ est un endomorphisme de $\mathcal{S}$ autoadjoint pour le produit scalaire L^2 , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 = \langle \varphi, (-D^2 + x^2 - \lambda)h_n \rangle = \underbrace{(2n + 1 - \lambda)}_{\neq 0} \langle \varphi, h_n \rangle,$$

donc $\varphi = 0$.

Transformée de Fourier – Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, il s'agit d'un calcul classique de transformée de Fourier d'une gaussienne. Supposons donc la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. L'égalité (3.1), en Fourier, devient $\widehat{h_{n+1}} = x\widehat{h_n} - D\widehat{h_n}$, soit $\widehat{h_{n+1}} = (-i)(x - D)\widehat{h_n}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, cela donne

$$\widehat{h_{n+1}} = (-i)\sqrt{2\pi}(-i)^n(x - D)h_n = \sqrt{2\pi}(-i)^{n+1}h_{n+1}.$$

□

Remarques

- Convient pour les leçons 209, 213, 234, 250, 265.
- Le développement tel quel peut être trop long : il faut alors faire des choix selon la leçon dans laquelle on le place.
- Il faut savoir démontrer l'injectivité de la transformée de Fourier et calculer la transformée de Fourier de la gaussienne.
- Le résultat de diagonalisation provient de [Hilb], mais la normalisation choisie est celle de [Ela] pour que la diagonalisation de Fourier soit plus agréable.
- Attention : on a déterminé tous les états propres de l'OHQ dans $\mathcal{S}$, mais si on se place par exemple dans C^∞ , pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'équation différentielle

$$-f'' + x^2 f = \lambda f$$

admet toujours des solutions non triviales. Ainsi, tout nombre complexe est valeur propre!

Références

- [Ela] Mohammed EL AMRANI, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*, ellipses, 2008.
- [Hilb] Laurent SCHWARTZ, *Analyse hilbertienne*, Hermann, 1979.