

FORMES DE HANKEL

THÉORÈME 1. [H2G2, PAGE 356] (FORMES DE HANKEL) Soit

$$P = a \prod_{i=1}^t (X - x_i)^{m_i} \in \mathbb{R}[X]$$

de degré n , avec les $x_i \in \mathbb{C}$ deux-à-deux distinctes. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$s_k = \sum_{i=1}^t m_i x_i^k$$

la $k^{\text{ème}}$ somme de Newton associée à P (par convention, $s_0 = n$). Alors,

$$q : X \in \mathbb{C}^n \mapsto \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} s_{i+j} X_i X_j \in \mathbb{C}$$

définit une forme quadratique $q_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$, et si l'on note (p, q) la signature de $q_{\mathbb{R}}$,

- P possède $t = p + q$ racines complexes distinctes,
- P possède $r := p - q$ racines réelles distinctes.

1 Formes quadratique réelle

Pour commencer, il est clair que q , définie par un polynôme homogène de degré 2, est une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$. De plus, les sommes de Newton sont réelles : en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$s_k = \sum_{i=1}^r m_i x_i^k + \sum_{i=r+1}^{r+s} m_i \underbrace{(x_i^k + \bar{x}_i^k)}_{=2\Re(x_i^k)} \in \mathbb{R}.$$

Finalement, q induit une forme quadratique $q_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$.

2 Réduction de Gauß sur $\mathbb{C}$

Notons $(e_0, \dots, e_{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et $(e_0^*, \dots, e_{n-1}^*)$ sa base duale. On a

$$\begin{aligned} q &= \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \left(\sum_{k=1}^t m_k x_k^{i+j} \right) e_i^* e_j^* \\ &= \sum_{k=1}^t m_k \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_k^i e_i^* \right)^2}_{=: \varphi_k^2} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que les φ_k sont linéairement indépendantes. Pour cela, considérons la matrice des coordonnées des φ_k dans la base des e_i^* :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_t \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_t^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,t}(\mathbb{C}).$$

En extrayant le premier mineur de taille t , on obtient une matrice de Vandermonde, inversible car les x_k sont deux-à-deux distincts. Ainsi, la matrice M est de rang t , ce qui prouve que la famille des φ_k est libre sur $\mathbb{C}$.

3 Réduction de Gauß sur $\mathbb{R}$

On peut écrire, en regroupant chaque racine complexe de P avec sa racine conjuguée,

$$\begin{aligned} q_{\mathbb{R}} &= \sum_{k=1}^t m_k \varphi_k^2 = \sum_{x_k \in \mathbb{R}} m_k \varphi_k^2 + \sum_{\Im(x_k) > 0} m_k \underbrace{(\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k^2})}_{=2\Re(\varphi_k)^2 - 2\Im(\varphi_k)^2} \\ &= \sum_{x_k \in \mathbb{R}} m_k \varphi_k^2 + 2 \sum_{\Im(x_k) > 0} m_k (\Re(\varphi_k))^2 - 2 \sum_{\Im(x_k) > 0} m_k (\Im(\varphi_k))^2 \end{aligned}$$

Montrons que la famille

$$\{\varphi_k, x_k \in \mathbb{R}\} \cup \{\Re(\varphi_k), \Im(x_k) > 0\} \cup \{\Im(\varphi_k), \Im(x_k) > 0\}$$

est libre. Quitte à réordonner les racines, on suppose que $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$, et que $x_{r+1}, \dots, x_{r+s}$ (où $r + 2s = t$) sont de parties imaginaires > 0 . Considérons alors la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & \dots & x_r & \Re(x_{r+1}) & \dots & \Re(x_{r+s}) & \Im(x_{r+1}) & \dots & \Im(x_{r+s}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_r^{n-1} & \Re(x_{r+1}^{n-1}) & \dots & \Re(x_{r+s}^{n-1}) & \Im(x_{r+1}^{n-1}) & \dots & \Im(x_{r+s}^{n-1}) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,t}(\mathbb{C}).$$

En effectuant les opérations

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket r+1, r+s \rrbracket, C_j &\leftarrow C_j + iC_{j+s}, \\ \forall j \in \llbracket r+s, t \rrbracket, C_j &\leftarrow -2iC_j, \\ \forall j \in \llbracket r+s, t \rrbracket, C_j &\leftarrow C_j + C_{j-s}, \end{aligned}$$

la matrice extraite de taille t en haut à gauche devient une matrice de Vandermonde associée aux x_i , qui est inversible car les x_i sont deux-à-deux distincts. Ainsi, la matrice considérée est de rang maximal t , ce qui prouve le résultat.

$$\text{En définitive, la signature de } q_{\mathbb{R}} \text{ est } (p, q) = \left(r + \frac{t-r}{2}, \frac{t-r}{2} \right) = \left(\frac{t+r}{2}, \frac{t-r}{2} \right).$$

On en déduit que

- P possède $t = p + q$ racines complexes distinctes,
- P possède $r = p - q$ racines réelles distinctes.

4 Application : polynômes réels de degré 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, et considérons le polynôme

$$P = aX^2 + bX + c.$$

Le degré de P est $n = 2$. Avec les notations qui précèdent, on a $s_0 = 2$, $s_1 = -\frac{b}{a}$ et $s_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$. Ainsi,

$$q_{\mathbb{R}} = 2X_0^2 - 2\frac{b}{a}X_0X_1 + \frac{b^2 - 2ac}{a^2}X_1^2.$$

On peut appliquer l'algorithme de Gauß à $q_{\mathbb{R}}$, et écrire

$$q_{\mathbb{R}} = 2 \left(X_0 - \frac{b}{2a}X_1 \right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{2a^2}X_1^2.$$

Ainsi,

- Si $\Delta := b^2 - 4ac > 0$, la signature de $q_{\mathbb{R}}$ est $(2, 0)$, et P possède deux racines réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, la signature de $q_{\mathbb{R}}$ est $(1, 0)$, et P possède une racine réelle double.
- Si $\Delta < 0$, la signature de $q_{\mathbb{R}}$ est $(1, 1)$, et P possède deux racines complexes conjuguées non réelles.

Remarques

- Convient pour les leçons 144, 170.

Complément : polynômes de degré 3

Soient $p, q \in \mathbb{R}^*$, et considérons le polynôme

$$P = X^3 + pX + q.$$

Le degré de P est $n = 3$. Avec les notations qui précèdent, on a $s_0 = 3$, $s_1 = 0$, $s_2 = -2p$, $s_3 = -3q$ et $s_4 = 2p^2$. Ainsi,

$$q_{\mathbb{R}} = 3X_0^2 - 2pX_1^2 + 2p^2X_2^2 - 6qX_1X_2 - 4pX_0X_2.$$

On peut appliquer l'algorithme de Gauß à $q_{\mathbb{R}}$, et écrire

$$q_{\mathbb{R}} = 3 \left(X_0 - \frac{2p}{3}X_2 \right)^2 + \frac{2p^2}{3} \left(X_2 - \frac{9q}{2p^2}X_1 \right)^2 + \frac{1}{2p^2}(-4p^3 - 27q^2)X_1^2.$$

Ainsi,

- Si $\Delta := -4p^3 - 27q^2 > 0$, la signature de $q_{\mathbb{R}}$ est $(3, 0)$, et P possède trois racines réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, la signature de $q_{\mathbb{R}}$ est $(2, 0)$, et P possède une racine réelle simple et une racine réelle double.
- Si $\Delta < 0$, la signature de $q_{\mathbb{R}}$ est $(2, 1)$, et P possède deux racines complexes conjuguées non réelles ainsi qu'une racine réelle.

Références

[H2G2] Philippe CALDERO, Jérôme GERMONI, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1*, Calvage & Mounet, 2013.