

MÉTHODE QR

1 Résultats du plan (admis)

1.1 Factorisation QR par Gram-Schmidt

PROPOSITION 1. [CIA] (FACTORISATION QR) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Il existe d'unique matrices Q unitaire et R triangulaire supérieure à diagonale > 0 telles que $A = QR$.

REMARQUE 2. En pratique, à cause des erreurs d'arrondis, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt donne des résultats désastreux pour déterminer la factorisation QR d'une matrice. On lui préférera donc la méthode de Householder (cf. [Cia]).

1.2 La décomposition QR est un homéomorphisme

THÉORÈME 3. Soit $T_{n,>0}^+(R)$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à diagonale > 0 . La décomposition QR réalise un homéomorphisme entre $U_n(\mathbb{C}) \times T_{n,>0}^+(R)$ et $GL_n(\mathbb{C})$.

Preuve. L'application $(Q, R) \mapsto QR$ est continue par continuité du produit matriciel, et bijective par ce qui précède. Il reste à démontrer que l'application inverse est continue. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices inversibles, $A_k = Q_k R_k$, convergeant vers $A = QR \in GL_n(\mathbb{C})$. Puisque $U_n(\mathbb{C})$ est compact, il existe une extraction φ et $\tilde{Q} \in U_n(\mathbb{C})$ telle que $Q_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \tilde{Q}$. Alors, $R_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \tilde{R} := \tilde{Q}^{-1}A$, puis $A = \tilde{Q}\tilde{R}$.

La matrice $\tilde{Q}$ est unitaire, et $\tilde{R}$ est triangulaire supérieure à diagonale ≥ 0 a priori. Sa diagonale est en fait > 0 car A est inversible. Par unicité de la décomposition, on a $\tilde{Q} = Q$ et $\tilde{R} = R$. En effectuant le même raisonnement avec une suite extraite quelconque, on démontre que les suites $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admettent pour uniques valeurs d'adhérences Q et R . Ces suites étant bornées, elles convergent vers ces matrices. $\square$

2 Méthode QR

DÉFINITION 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit la suite

$$\begin{cases} A_1 = A \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, A_{k+1} = R_k Q_k \end{cases}$$

où $A_k = Q_k R_k$ est la factorisation QR de la matrice $A_k : Q_k \in U_n(\mathbb{C})$ (ou $O_n(\mathbb{R})$ si A est réelle), R_k triangulaire supérieure avec des coefficients > 0 sur la diagonale.

THÉORÈME 5. [CIA] (MÉTHODE QR) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible dont les valeurs propres sont toutes de modules différents $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$. On peut alors écrire $A = P\Lambda P^{-1}$ avec $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Supposons que la matrice P^{-1} admette une factorisation LU . Alors, la suite $(A_k)_{k \geq 0}$ définie en 4 vérifie :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, & (A_k)_{ii} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_i, \\ \forall 1 \leq j < i \leq n, & (A_k)_{ji} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \end{cases}$$

Idée de la preuve –

LEMME 6. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A_{k+1} = \mathcal{Q}_k^* A \mathcal{Q}_k$ avec $\mathcal{Q}_k = Q_1 \dots Q_k$.

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{Q}_k^* A \mathcal{Q}_k = Q_k^* (\mathcal{Q}_{k-1}^* A \mathcal{Q}_{k-1}) Q_k$$

et

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^* Q_k R_k Q_k = Q_k^* A_k Q_k.$$

Les suites $(A_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{Q}_k^* A \mathcal{Q}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifient donc la même relation de récurrence. Comme leur premier terme ($k = 0$) vaut A , elles sont égales. $\square$

On est donc amené à étudier le comportement asymptotique de la suite $(\mathcal{Q}_k)_{k \geq 1}$. On remarque tout d'abord que ces matrices interviennent dans la décomposition QR des puissances de A :

LEMME 7. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k = \mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k$ avec $\mathcal{R}_k = R_k \dots R_1$.

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{Q}_{k+1} \mathcal{R}_{k+1} = Q_1 \dots Q_{k+1} R_{k+1} \dots R_1 = \mathcal{Q}_k \underbrace{A_{k+1}}_{=\mathcal{Q}_k^* A \mathcal{Q}_k} \mathcal{R}_k = A \mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k$$

et $\mathcal{Q}_0 \mathcal{R}_0 = I$, donc $\mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k = A^k$. $\square$

L'idée est d'obtenir une autre factorisation QR des puissances de A , puis d'utiliser l'unicité de la décomposition QR afin d'obtenir des expressions agréables des $\mathcal{Q}_k$.

Autre expression des $\mathcal{Q}_k$ – On peut écrire $P = QR$, $P^{-1} = LU$. Alors, puisque A est inversible, on a, pour tout $k \geq 1$,

$$A^k = P \Lambda^k P^{-1} = QR \Lambda^k LU = QR \underbrace{(\Lambda^k L \Lambda^{-k})}_{=M_k} \Lambda^k U$$

avec

$$M_k = ((\lambda_i / \lambda_j)^k L_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ (*) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (*) & \dots & (*) & 1 \end{bmatrix}$$

avec $(*) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ car pour tout $i > j$, on a $\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right| < 1$. Ainsi, $RM_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} R \in GL_n(\mathbb{C})$. Puisque $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut supposer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice RM_k est inversible, donc admet une décomposition QR que l'on note

$$RM_k = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k. \quad (2.1)$$

Comme la décomposition QR est un homéomorphisme cf. [plan](#), on a $\tilde{Q}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} I_n$ et $\tilde{R}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} R$

Finalement, pour tout $k \geq k_0$,

$$A^k = \underbrace{(Q \tilde{Q}_k)}_{\text{unitaire}} \underbrace{(\tilde{R}_k R \Lambda^k U)}_{T_n^+ \text{ à diagonale } \geq 0} = \mathcal{Q}_k \mathcal{R}_k,$$

donc il existe $D_k = \text{diag}(d_1^{(k)}, \dots, d_n^{(k)})$ avec, pour tout $1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|d_i^{(k)}| = 1$, telle que $\mathcal{Q}_k = Q \tilde{Q}_k D_k$.

Fin de la preuve – Pour tout $k \geq k_0$,

$$A_{k+1} = \mathcal{Q}_k^* A \mathcal{Q}_k = D_k^* \underbrace{\tilde{Q}_k^* (R \Lambda R^{-1}) \tilde{Q}_k}_{=(\mathfrak{h})} D_k,$$

avec

$$(\mathfrak{h}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} R \Lambda R^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & (*) & \dots & (*) \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

car R est triangulaire supérieure. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(A_{k+1})_{ii} = (D_k^*)_{ii} (\mathfrak{h})_{ii} (D_k)_{ii} = \underbrace{|d_i^{(k)}|^2}_{=1} (\mathfrak{h})_{ii} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda_i.$$

De même, pour tous $i > j$, $(A_{k+1})_{ij} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$, ce qui achève la preuve du théorème.

Remarques

- Convient pour les leçons 148, 149, 226.
- Les éléments $(A_k)_{ij}$ pour $i < j$ convergent en module vers ceux de $R \Lambda R^{-1}$.
- Si plusieurs valeurs propres ont le même module, alors sous l'hypothèse d'une factorisation LU "par blocs" de P^{-1} , les A_k ont une allure limite triangulaire supérieure par blocs.

Références

[Cia] Philippe CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 2006.