45 Equation de la chaleur sur le cercle

ref : Candelpergher + Maison

Théorème 45.1 *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R})$. L'équation de la chaleur $\partial_t u = \partial_{xx} u$ admet une unique solution $u :]0,+\infty[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $u(t,.) \to u_0$ dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.*

Preuve. On raisonne par analyse synthèse :

Analyse :

Prenons u solution du problème.

Pour chaque instant t, $x \mapsto u(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc sa série de Fourier est normalement convergente et est égale à la fonction :

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$$

où $c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x$.

Comme u est $\mathcal{C}^1$ des deux variables et $[0,2\pi]$ est un segment, la fonction c_n est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ par dérivation sous le signe intégral et $c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_t u(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x$.

On utilise maintenant l'équation, puis des intégrations par parties où on utilise la périodicite :

$$\begin{aligned} c_n'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_x x u(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}[\partial_x u(t,x)e^{-inx}]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_x u(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{in}{2\pi}[u(t,x)e^{-inx}]_0^{2\pi} - \frac{n^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}\mathrm{d}x \\ &= 0 + 0 - n^2 c_n(t) \end{aligned}$$

Donc en résolvant l'équation différentielle, on trouve pour $t > 0$,

$$c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$$

On voudrait montrer que les c_n^0 sont les coefficients de u_0 en passant à la limite quand t tend vers 0. C'est possible par le théorème de Parseval : puisque $u(t,.) \to u_0$ dans L^2, par l'isométrie $L^2 \to l^2$, $(c_n(t)) \to c_n(u_0)$ dans l^2, donc pour tout n, $c_n^0 = c_n(u_0)$. On peut alors écrire la solution u en fonction de la donnée initiale u_0 : $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$,

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u_0)e^{-n^2t}e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(y)e^{-iny}\mathrm{d}y)e^{-n^2t}e^{inx}$$

Comme pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_n \int_0^{2\pi} |u_0(y)|e^{-n^2t}\mathrm{d}y < +\infty$$

Par le théorème de convergence dominée, on peut intervertir les sommations :

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2t}e^{in(x-y)})u_0(y)\mathrm{d}y$$

On reconnait alors un produit de convolution par le noyau de la chaleur défini par : $\forall t > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$,

$$K(t,x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2t}e^{inx}$$

Synthèse :

Il reste à vérifier que $u(t,x) = K(t,x) * u_0(x)$ est bien solution du problème. Il faut d'abord vérifier la régularité, on va voir l'effet régularisant de l'équation de la chaleur : montrons que u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On pose $K_n(t,x) = \frac{1}{2\pi}e^{-n^2t}e^{inx}$ si bien que $K = \sum K_n$. Pour $k,l \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $t > a > 0$,

$$|\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l}K(t,x)| \leq \frac{1}{2\pi}n^{2k+l}e^{-n^2a}$$

Le second membre est un terme général de série convergente, donc par le théorème de dérivation sous le signe somme, K est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,+\infty[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et ceci pour tout $a > 0$, donc K est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Et on remarque que $\partial_t K = \partial_{xx}K$.

Ensuite u s'exprime comme une intégrale à paramètre :

$$u(t,x) = \int_0^{2\pi} K(t,x-y)u_0(y)\mathrm{d}y$$

L'intégrande est $\mathcal{C}^\infty$ des deux variables (t,x) et pour tout $k,l \in \mathbb{N}$ et $t > a > 0$, on a la majoration indépendante de x et t :

$$|\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l}K(t,x-y)u_0(y)| \leq C|u_0(y)|$$

avec $C > 0$ constante qui majore la fonction continue $\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l}K(t,x)$ comme précédemment, et u_0 est intégrable sur $[0,2\pi]$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, on en déduit que u est $\mathcal{C}^\infty$ (en particulier $\mathcal{C}^2$ comme souhaité) sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Et en dérivant sous l'intégrale on trouve $\partial_t u = \partial_{xx}u$ puisque $\partial_t K = \partial_{xx}K$.

Il reste à vérifier que $u(t,.) \to u_0$ dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, par Parseval, il suffit de montrer que $c_n(u(t,.)) \to c_n(u_0)$ dans $l^2(\mathbb{Z})$.

L'interversion somme intégral

$$\|c_n(u(t,.)) - c_n(u_0)\|_{l^2}^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |1-e^{-n^2t}|^2|c_n(u_0)|^2$$

Le terme de droite est une série qui converge normalement sur $]0,+\infty[$ car :

$$|1-e^{-n^2t}|^2|c_n(u_0)|^2 \leq 4|c_n(u_0)|^2$$

et $(c_n(u_0)) \in l^2$ car $u_0 \in L^2$ par Parseval.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|1-e^{-n^2t}|^2|c_n(u_0)|^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc par le théorème de la double limite, $\|c_n(u(t,.)) - c_n(u_0)\|_{l^2}^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ ce qui achève la démonstration. $\square$

Leçons concernées : séries de Fourier, problème d'interversion de limites, suites et séries de fonctions, suites et séries de fonctions intégrables, intégrales à paramètre.