Lemme de Morse:

Référence : François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel.*

Notation 1. *On note $S_n(R)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles, $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles, $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles réelles.*

Lemme 2 (p.201)**.** ***(Réduction des formes quadratiques)*** *Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application*

$$\widetilde{\psi} : \begin{array}{ccc} V & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & \widetilde{\psi}(A) \end{array}$$

de classe C^1 telle que pour tout $A \in V$,

$$A = {}^t\widetilde{\psi}(A) A_0 \widetilde{\psi}(A).$$

Preuve : On pose $h : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMA_0M \end{array}$.
C'est une fonction polynomiale, donc de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$h(I_n + H) = {}^t(I_n + H)A_0(I_n + H) = h(I_n) +^t HA_0 + A_0H + o(||H||).$$

On a alors $dh(I_n).H = {}^t(A_0H) + A_0H$ pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$. De plus, le noyau de l'application linéaire $dh(I_n)$ est :

$$\ker dh(I_n) = \{H \in M_n(R),\ {}^t(A_0H) = -A_0H\} = A_0^{-1}A_n(\mathbb{R}).$$

On pose $F = \{H \in M_n(\mathbb{R}),\ A_0H \in S_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}S_n(\mathbb{R})$. Comme A_0 est inversible, on a :

$$M_n(\mathbb{R}) = A_n(R) \oplus S_n(\mathbb{R}) = A_0^{-1}A_n(\mathbb{R}) \oplus A_0^{-1}S_n(\mathbb{R}).$$

Donc F est un supplémentaire de $\ker dh(I_n)$ dans $M_n(\mathbb{R})$. Considérons $\psi : F \to S_n(\mathbb{R})$ la restriction de h à F. On a $I_n \in F$ et :

$$\ker d\psi(I_n) = \ker dh(I_n) \cap F = \{0\}.$$

Ainsi $d\psi(I_n)$ est injective, et surjective. En effet, comme A_0 est inversible, pour $A \in S_n(\mathbb{R})$ donnée, l'équation $dh(I_n).H = A$ admet comme solution évidente $\frac{1}{2}A_0^{-1}A \in F$. Elle est donc bijective. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F (que l'on peut supposer, quitte à le réduire, contenu dans l'ouvert des matrices inversibles) tel que ψ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $V = \psi(U)$. Or, V est un voisinage de $A_0 = \psi(I_n) = h(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$. Et pour tout $A \in V$, il existe une unique matrice inversible $M = \psi^{-1}(A)$ telle que

$$A = {}^tMA_0M.$$

On pose alors $\widetilde{\psi}; \begin{array}{ccc} V & \to & U \\ A & \mapsto & M = \psi^{-1}(A) \end{array}$ qui est de classe C^1 sur V et vérifie la propriété annoncée.

$\square$

Théorème 3 (p.354)**.** *Soient U un ouvert de R^n tel que $0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^3. On suppose que :*

- *0 est un point critique de f (i.e. $df(0) = 0$) ;*
- *$d^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.*

Alors, il existe $\varphi : x \mapsto u = \varphi(x)$ un difféomorphisme entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + ... + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - ... - \varphi_n(x)^2.$$

Preuve : En fixant une base B, on identifie les matrices symétriques avec les formes quadratiques, les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ avec les applications linéaires $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ecrivons la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f au voisinage de 0 dans cette base. On a $f(x) - f(0) =^t xQ(x)x$ où $Q(x)$ est la matrice symétrique (Schwarz) dans la base B définie par :

$$Q(x) = \int_0^1 (1-t)d^2f(tx)dt.$$

Comme f est de classe C^3 sur U, Q est de classe C^1 sur U (théorème de dérivation sous le signe somme).

Comme $Q(0) = \frac{1}{2}d^2f(0)$ est inversible, le lemme précédent permet de fixer un voisinage U' de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction

$$M : \begin{array}{ccc} U' & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & M(x) \end{array}$$

de classe C^1 telle que pour tout $x \in U'$, $Q(x) = {}^tM(x)Q(0)M(x)$. On a alors :

$$f(x) - f(0) = {}^t(M(x)x)Q(0)(M(x)x) = {}^tyQ(0)y \text{ où } y = M(x)x.$$

Comme $Q(0) = \frac{1}{2}d^2f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, d'après le théorème d'inertie de Sylvester, il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$Q(0) = {}^tA\Delta_{p,n-p}A \text{ où } \Delta_{p,n-p} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Ainsi pour tout $x \in U'$, on a donc $f(x) - f(0) = {}^t(AM(x)x)\Delta_{p,n-p}(AM(x)x)$. Finalement, on pose : $\varphi : \begin{array}{ccc} U' & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & AM(x)x \end{array}$ qui est une application de classe C^1.

On a $d\varphi(0).h = AM(0)h$ pour tout $h \in U'$. En effet, $\varphi(0) = 0$ et pour tout $h \in U'$:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= AM(h)h \\ &= A(M(0) + dM(0)(h) + o(||h||))h \\ &= 0 + AM(0)h + o(||h||). \end{aligned}$$

Ainsi, la différentielle de φ en 0 étant inversible, le théorème d'inversion locale donne un voisinage de 0 V tel que φ soit un C^1-difféomorphisme de V sur $\varphi(V)$ (et $0 = \varphi(0) \in \varphi(V)$) On a alors, pour tout $x \in V$:

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + ... + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - ... - \varphi_n(x)^2.$$

$\square$