Dev 27 - Théorème du point fixe de Banach (Analyse)

Soient (X,d) un ev. métrique complet et $f : X \to X$ une application.

a) Si f est contractante de rapport $k \in [0,1[$, alors f admet un unique point fixe.
Le cas échéant, si on note u ce point fixe, alors $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, d(f^n(x), u) \leq k^n \frac{d(x, f(x))}{1-k}$

b) Supposons que $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{1+x^2} \in \mathbb{R}$
Alors $|f(x)-f(y)| < |x-y|$ pour tous $x \neq y \in \mathbb{R}$, mais f n'admet pas de point fixe.

Preuve :

a) • * (Existence) Soit $x_0 \in X$ qcq. Soit $x_n = f^n(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n = f(x_{n-1})$ et $x_{n+1} = f(x_n)$,
d'où $d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq k\, d(x_{n-1}, x_n)$ par k-contractance de f
$\leq \dots \leq k^n d(x_0, x_1)$ par récurrence.

Mais $\sum_{n \geq 1} k^n d(x_0, x_1)$ CV car $|k| < 1$,
d'où $\sum_{n \geq 1} d(x_n, x_{n+1})$ CV par comparaison,
ainsi $(x_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans (X,d)

(En effet : Soit $\varepsilon > 0$. Alors, par le critère de Cauchy des séries numériques qui CV,
il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq N, \forall p > 0$, $\sum_{k=n}^{n+p} d(x_k, x_{k+1}) \leq \varepsilon$
D'où $\forall n \geq N, \forall p > 0$, $d(x_n, x_{n+p}) \underset{(\Delta T)}{\leq} \sum_{k=n}^{n+p} d(x_k, x_{k+1}) \leq \varepsilon$)

Ĉ (X,d) est complet, alors $(x_n)_{n \geq 1}$ CV dans (X,d). Notons $x \in X$ la limite.
Ĉ f est continue (car lipschitzienne), alors $(f(x_n))_{n \geq 1}$ converge vers $f(x)$,
et d'autre part, on a $f(x_n) = x_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ dans (X,d).
Donc, par unicité de la limite (car (X,d) est séparé), on obtient $f(x) = x$. Donc x est un point fixe.

* (Unicité) Soient $x, y \in X$ tq $f(x) = x$ et $f(y) = y$.
Alors $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \underset{(\in [0,1[)}{k}\, d(x,y)$, donc on a nécessairement $d(x,y) = 0$,
autrement dit $x = y$

(À propos de la preuve de ce qui suit)
(Bonus : on a également que toute suite récurrente dont la fct de récurrence est f converge vers l'unique point fixe de f.)

• Soient $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$.

On a, par récurrence, $\boxed{d(f^n(x), u) = d(f^n(x), f^n(u)) \leq k^n d(x,u)}$

$\boxed{\text{Mais } d(x,u) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), u) \leq d(x, f(x)) + k\, d(x,u)}$, d'où $(1-k)\, d(x,u) \leq d(x, f(x))$,

ainsi $d(x,u) \leq \dfrac{d(x, f(x))}{1-k}$

Donc $d(f^n(x), u) \leq k^n \dfrac{d(x, f(x))}{1-k}$

b) • ✱ Soient $x, y \in \mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $|f'(x)| = \left|\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| \leq \left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}\right| = \dfrac{|x|}{|x|} = 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

Ainsi, par l'IAF, on a $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$.

✱ Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|f(x) - f(y)| = |x-y|$

On a $\underbrace{|f(x) - f(y)|}_{=|x-y|} |f(x) + f(y)| = \left|\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}\right)\right| = \left|1 + x^2 - (1+y^2)\right|$

$= |x^2 - y^2| = |x-y|\,|x+y|$

D'où $|x-y| = 0$ ou $|f(x) + f(y)| = |x+y|$

(Par l'abs) supposons que $|f(x) + f(y)| = |x+y|$. Autrement dit, $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = |x+y|$

Mais $\boxed{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} > \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y|}$.

D'où $|x| + |y| < |x+y| \underset{(IT)}{\leq} |x| + |y|$, c'est absurde !

Donc on a nécessairement $|x-y| = 0$, càd $x = y$

✱ Conclusion : $\forall x \neq y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| < |x-y|$

• Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = x \iff \sqrt{1+x^2} = x \iff \begin{cases} 1 + x^2 = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, ce qui est faux

(car $f(x) \geq 0$) $\Leftarrow x \geq 0$

Donc l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution. Autrement dit, f n'a pas de point fixe.

Commentaires additionnels :

- Le dernier point du a) montre la vitesse de convergence de toute suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ vers (nécessairement) le point fixe de f.
- Le th. du point fixe de Banach s'utilise notamment dans la preuve de deux grands résultats :
  - ✱ Le TIL
  - ✱ Le th. de Cauchy-Lipschitz (local, linéaire et global)

Résultats intermédiaires

- IAF
- Critère de Cauchy pour les séries numériques convergentes.