3.17 Lemme de Morse

Leçons : 171, 206, 214, 215.

Référence : [Rou].

Prérequis : matrices symétriques/antisymétriques, théorème d'inversion locale, formules de Taylor, réduction des formes quadratiques réelles, signature.

Lemme : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho \in \mathcal{C}^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tel que : $\forall A \in V,\ A = {}^t\rho(A)A_0\rho(A)$.

Théorème : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que 0 est un point critique non dégénéré de f, et que la forme quadratique $d^2f(0)$ est de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ entre deux voisinages V_0 et W_0 de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$, et :

$$\forall x \in V_0,\ f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \ldots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \ldots - \varphi_n(x)^2.$$

Preuve du lemme. On considère la fonction $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = {}^tMA_0M$. On voudrait appliqur le théorème d'inversion locale (TIL) à la fonction φ en I_n : pour cela il faut d'abord calculer sa différentielle. Pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\varphi(I_n + H) = A_0 + {}^t(A_0H) + A_0H + {}^tHA_0H,$$

avec ${}^tHA_0H \underset{H\to 0}{=} o(\|H\|)$, donc on en déduit que φ est différentiable en I_n et $\mathrm{d}\varphi(I_n) : H \mapsto {}^t(A_0H) + A_0H$. Ainsi, $\ker(\mathrm{d}\varphi(I_n)) = \{H \in M_n(\mathbb{R}),\ A_0H \in A_n(\mathbb{R})\}$, donc $\mathrm{d}\varphi(I_n)$ n'est pas injective. Pour pouvoir appliquer le TIL, on va donc considérer une restriction. Puisque $M_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R})$, on a $M_n(\mathbb{R}) = \ker \mathrm{d}\varphi(I_n) \oplus F$, où $F = \{H \in M_n(\mathbb{R}),\ A_0H \in S_n(\mathbb{R})\}$. Soit ψ la restriction de φ à F, qui est un SEV de $M_n(\mathbb{R})$. On a $I_n \in F$ car $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$, donc ψ est différentiable en I_n et $\mathrm{d}\psi(I_n) = \mathrm{d}\varphi(I_n)_{|F}$. Ainsi, $\ker \mathrm{d}\psi(I_n) = \ker \mathrm{d}\varphi(I_n) \cap F = \{0\}$ et $\mathrm{d}\psi(I_n)$ est injective, donc bijective par égalité des dimensions de F et $S_n(\mathbb{R})$. Ainsi, d'après le TIL, il existe U voisinage de I_n dans F et V voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ tels que ψ est un C^1-difféomorphisme de $U \to V$. Quitte à considérer $U \cap GL_n(\mathbb{R})$ qui reste encore ouvert, on peut supposer que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$. En posant ainsi $\rho = \psi_{|U}^{-1} : V \to GL_n(\mathbb{R})$, on obtient le lemme.

□

Preuve du théorème. Quitte à restreindre U, on peut supposer U convexe. Alors, d'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 :

$$\forall x \in U,\ f(x) - f(0) = x\mathrm{d}f(0) + \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2f(tx)(x,x)\mathrm{d}t,$$

avec $\mathrm{d}f(0) = 0$ par hypothèse et $\mathrm{d}^2f(tx)(x,x) = {}^tx\mathrm{Hess}f(tx)x$, donc on peut écrire $f(x) - f(0) = {}^txQ(x)x$ où

$$\forall x \in U,\ Q(x) = \int_0^1 \mathrm{Hess}f(tx)\mathrm{d}t \in S_n(\mathbb{R}),$$

et on peut déjà remarquer que d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, la fonction Q est de classe C^1 sur U (car la fonction f est de classe C^3). On a $Q(0) = \frac{1}{2}\mathrm{Hess}f(0) \in S_n(\mathbb{R})$ et $Q(0) \in GL_n(\mathbb{R})$ par hypothèse, donc d'après le lemme il existe un voisinage V de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\rho \in C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ tel que :

$$\forall A \in V,\ A = {}^t\rho(A)Q(0)\rho(A).$$

Or Q est continue et à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$, donc il existe un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $Q(W) \subset V$. Ainsi :

$$\forall x \in W,\ f(x) - f(0) = {}^txQ(x)x = {}^t\rho(Q(x))Q(0)\rho(Q(x)).$$

Or par hypothèse, la forme quadratique $\mathrm{d}^2f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, donc il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Q(0) = {}^tP \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & -I_{n-p} \end{pmatrix} P$, et donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in W,\ f(x) - f(0) &= {}^t\varphi(x) \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & -I_{n-p} \end{pmatrix} \varphi(x) \\ &= \varphi_1(x)^2 + \ldots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \ldots - \varphi_n(x)^2,\end{aligned}$$

où : $\forall x \in W,\ \varphi(x) = P\rho(Q(x))x$. On a donc l'égalité souhaitée, mais φ n'est pas forcément un C^1-difféomorphisme : on va donc appliquer le TIL en 0 pour conclure. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= P\rho(Q(h))h \\ &\underset{h\to 0}{=} P(\rho(Q(0)) + o(1))h \\ &\underset{h\to 0}{=} \varphi(0) + P\rho(Q(0))h + o(\|h\|),\end{aligned}$$

car ρ et Q sont de classe C^1. Ainsi, on en déduit que φ est différentiable en 0 et $\mathrm{d}\varphi(0) : h \mapsto P\rho(Q(0))h$, avec $P\rho(Q(0))$ inversible, donc on en déduit que $\mathrm{d}\varphi(0)$ est inversible et donc d'après le TIL, il existe deux voisinages V_0 et W_0 de 0 tels que $\varphi : V_0 \to W_0$ est un C^1-difféomorphisme. On a donc le résultat voulu.

□

Questions :

1. Quelles sont les conditions sur la fonction f pour que la hessienne soit symétrique ?
2. Applications ?

Réponses :

1. Il faut que f soit de classe C^2.
2. Voir [Berb].