Théorème d'inversion locale

- Rouvière, *Le petit guide du calcul différentiel.* (188, 222-226)
- Gourdon, *Analyse.* (341-343)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$. Soit $a \in U$ tel que $D_a f$ est inversible. Alors, il existe $V \subset U$ un voisinage de a, il existe W un voisinage de $f(a)$ tels que $f_{|V} : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

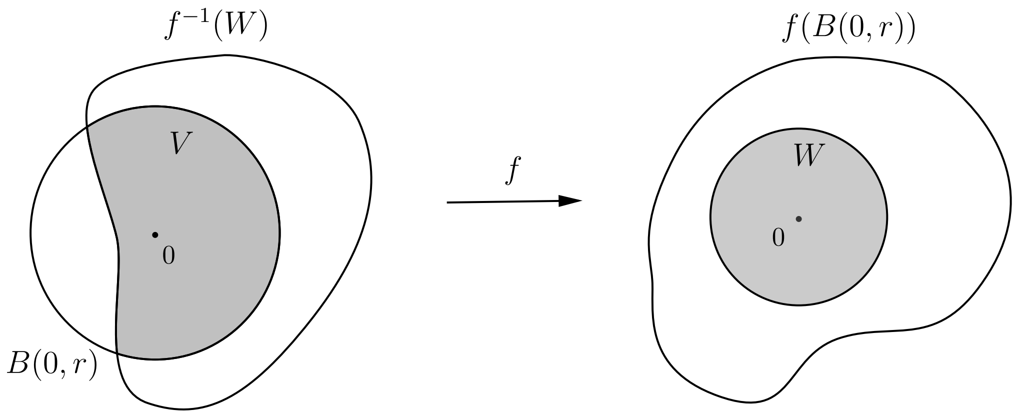
Démonstration. Quitte à considérer la fonction $x \mapsto D_a f^{-1}\big(f(a+x) - f(a)\big)$, on peut supposer $a = 0$, $f(a) = 0$ et $D_a f = D_0 f = \mathrm{Id}$.

- Montrons que f réalise une bijection entre deux voisinages ouverts de 0. Soit $y \in \mathbb{R}^n$.

Résoudre l'équation $y = f(x)$ équivaut à trouver un point fixe à $\varphi_y : x \mapsto x + y - f(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. On a $D_x\varphi_y = \mathrm{Id} - D_x f = D_0 f - D_x f$.
Or $x \mapsto D_x f$ est continue sur U, donc par définition, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(0,r) \subset U$ et $\forall x \in \overline{B}(0,r)$, $\|\!|D_x\varphi_y\|\!| \leqslant 1/2$. Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis, φ_y est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur le convexe $\overline{B}(0,r)$.
En fait, r ne dépend pas de y. Considérons $\|y\| < \dfrac{r}{2}$. Ainsi, $\forall x \in \overline{B}(0,r)$,

$$\|\varphi_y(x)\| \leqslant \|\varphi_y(x) - y\| + \|y\| = \|\varphi_y(x) - \varphi_y(0)\| + \|y\| < \frac{1}{2}\|x - 0\| + \frac{r}{2} \leqslant r$$

Par conséquent, $\varphi_y : \overline{B}(0,r) \to B(0,r) \subset \overline{B}(0,r)$ est $\frac{1}{2}$-contractante. Comme $\overline{B}(0,r)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$ complet, alors $\overline{B}(0,r)$ est complet. Par le théorème du point fixe de Banach-Picard, il existe un unique $x \in \overline{B}(0,r)$ tel que $\varphi_y(x) = x$.
Comme x est dans l'image de φ_y, alors $\|x\| < r$.
Posons $W = B(0, r/2)$ et $V = B(0,r) \cap f^{-1}(W)$ des ouverts. On a alors montré que $\forall y \in W,\ \exists! x \in V,\ f(x) = y$, donc que $f_V : V \to W$ est une bijection.



- Montrons que $g = f^{-1} : W \to V$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrons déjà que g est continue.

Comme $\varphi_0 : x \mapsto x - f(x)$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne alors

$$\forall x, x' \in V, \quad \|x - x'\| \leqslant \|\varphi_0(x) - \varphi_0(x')\| + \|f(x) - f(x')\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - x'\| + \|f(x) - f(x')\|$$

Donc, $\|x - x'\| \leqslant 2\|f(x) - f(x')\|$, d'où $\forall y, y' \in W,\ \|g(y) - g(y')\| \leqslant 2\|y - y'\|$. $(\star)$
Donc, g est continue.

Montrons que g est différentiable. Prenons $x, x_0 \in V$ et $y, y_0 \in W$ tels que $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. Alors,

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) = D_{x_0} f(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(\|x - x_0\|)$$

Par $(\star)$, $\|x - x_0\| \leqslant 2\|y - y_0\|$, donc $D_{x_0}f(x - x_0) = y - y_0 + \underset{y \to y_0}{o}(\|y - y_0\|)$.
Donc, $f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = x - x_0 = (D_{x_0}f)^{-1}(y - y_0) + \underset{y \to y_0}{o}(\|y - y_0\|)$.
Ce qui établit la différentiabilité de f^{-1} en y_0 et $D_{y_0}f^{-1} = (D_{x_0}f)^{-1}$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f^{-1} aussi.
(Notons $J : \ell \in GL(\mathbb{R}^n) \mapsto \ell^{-1} \in GL(\mathbb{R}^n)$ une application continue, alors $Dg = J \circ Df \circ g$ est continue (puisque g est différentiable).) $\square$