leçons : 160 : Endomorphismes remarquables
103 : sous-groupe distingué et groupe quotient
204 : Connexité.
217 : Sous-variétés.
106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, Sg de $GL(E)$

Simplicité de $SO_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$ impair

22

Référence : Gonnord - Tosel "Calcul Différentiel" p. 77

Prérequis : (i) $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété réelle de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$

(ii) $T_{Id} O_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (le plan tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en Id est l'ensemble des matrices anti-symétriques)

(iii) $SO_n(\mathbb{R})$ est une sous variété réelle. C'est la composante connexe de Id dans $O_n(\mathbb{R})$. (Utiliser la réduction des endomorphismes orthogonaux)

Thm : Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est simple pour n impair ≥ 3.

preuve :

① Idée générale : G sous groupe distingué de $SO_n(\mathbb{R})$ non réduit à $\{Id\}$

On va montrer que pour $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in G^n$ bien choisi, l'application

$$\varphi : \begin{cases} SO_n(\mathbb{R}) \rightarrow SO_n(\mathbb{R}) \\ g \mapsto \prod_{i=1}^{n} g \omega_i g^{-1} \omega_i^{-1} \end{cases}$$

est une application $\mathcal{C}^1$ entre sous variétés qui vérifie les hypothèse du thm d'inversion locale en Id.

$\varphi(SO_n(\mathbb{R})) \subset G$ car G est distingué donc $\mathring{G} \neq \emptyset$ donc G est ouvert et fermé dans $SO_n(\mathbb{R})$ connexe donc $G = SO_n(\mathbb{R})$

② Soient $\omega_1, \dots, \omega_n \in SO_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{cases} SO_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R}) \\ g \longmapsto \prod_{i=1}^{n} g \omega_i g^{-1} \omega_i^{-1} \end{cases}$

$$\begin{cases} \varphi \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ et } d\varphi(Id) = T_{Id}\varphi : \begin{cases} T_{Id} SO_n(\mathbb{R}) \longrightarrow T_{Id} SO_n(\mathbb{R}) \\ h \longmapsto nh - \sum_{i=1}^{n} \omega_i h \omega_i^{-1} \end{cases} \\ \varphi(Id) = Id \end{cases}$$

En effet, $\forall i \in [\![1,n]\!]$
$$\begin{aligned}(Id+h)\omega_i(Id+h)^{-1}\omega_i^{-1} &= (Id+h)\omega_i(Id - h + o(\|h\|))\omega_i^{-1} \\ &= (\omega_i + h\omega_i)(\omega_i^{-1} - h\omega_i^{-1} + o(\|h\|)) \\ &= Id - \omega_i h \omega_i^{-1} + h + o(\|h\|)\end{aligned}$$

$$h \in \operatorname{Ker} d\varphi(Id) \iff h = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \omega_i h \omega_i^{-1} \quad (*)$$

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $(A,B) \mapsto \operatorname{Tr}({}^tAB)$

h et les $\omega_i h \omega_i^{-1}$ sont sur la même sphère de centre 0 et de rayon $\|h\|$

$\|\cdot\|$ est euclidienne donc strictement convexe donc $(*) \iff \forall i \in [\![1,n]\!]$ $h = \omega_i h \omega_i^{-1}$

③ On fixe $\omega \in G \setminus \{Id\}$, on note $V = \mathrm{Ker}(\omega - Id)$ et $d = \dim V$

On a $1 \leqslant d \leqslant n-1$ car $\omega \neq Id$ et n impair $\left(\omega \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & R_{\theta_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix} \right)$

On a les trois propriétés suivantes :

(i) $SO_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ de dimension d.
preuve : choisir des BOND adaptées

(ii) $\forall g \in SO_n(\mathbb{R})$, si $g(V) = W$ alors $\mathrm{Ker}(g\omega g^{-1} - Id) = W$

(iii) Pour $I \subset [\![1,n]\!]$ ~~et~~ $\# I = d$, on note $W_I = \mathrm{vect}(e_i, i \in I)$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $\forall i \in I$ $\mathbb{R}e_i = \bigcap\limits_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \# I = d \\ i \in I}} W_I$.

On note r le nombre de ces W_I. et on numérote les I.

On choisit $g_1, \dots, g_r \in SO_n(\mathbb{R})$ tels que $\forall j \in [\![1,r]\!]$ $g_j(V) = W_{I_j}$

et on pose $\omega_j = g_j \omega g_j^{-1} \in G$ car G est distingué.

Soit $h \in \mathrm{Ker}\, d\varphi(Id)$.

D'après ①, h commute aux ω_j donc aux $\omega_j - Id$

donc $\mathrm{Ker}(\omega_j - Id) = W_{I_j}$ est stable par h $\forall j$.

h laisse stable tous les $\mathbb{R}e_i$ par (iii)

$T_{Id}\, SO_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc $h = 0$.

④ Avec les ω_j comme ci-dessus.

$d\varphi(Id)$ est bijective.

Par le théorème d'inversion locale : $\exists\, V$ voisinage de Id dans $SO_n(\mathbb{R})$ tq $\varphi_{|V} : V \to \varphi(V)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

$\varphi(SO_n(\mathbb{R})) \subset G$ car G est distingué donc G contient un voisinage de Id.

Les $m_A : \begin{array}{l} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{array}$ sont des homéomorphismes donc G est ouvert.

$SO_n(\mathbb{R}) \setminus G = \bigcup\limits_{x \in SO_n(\mathbb{R}) \setminus G} xG$ est ouvert donc G est fermé.

$SO_n(\mathbb{R})$ est connexe donc $G = SO_n(\mathbb{R})$.