

Injectivité de la transformée de Fourier

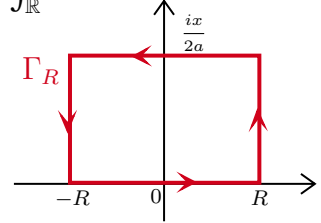
- El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. (115-116,156-157)

Lemme : Soit $a > 0$. Pour $\gamma_a : t \mapsto e^{-at^2}$ on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{\gamma}_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a}\right)$.

Démonstration. Tout d'abord, $\gamma_a \in L^1(\mathbb{R})$ donc sa transformée de Fourier est bien définie.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\hat{\gamma}_a(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} e^{-itx} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(t^2 + \frac{itx}{a})} dt = e^{-\frac{x^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(t + \frac{ix}{2a})^2} dt$.

On va alors étudier la fonction $z \mapsto e^{-az^2}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Soit $R > 0$. Considérons le chemin Γ_R défini comme suit. Comme Γ_R est un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{C}$ un ouvert convexe alors par le théorème de Cauchy :



$$0 = \int_{\Gamma_R} e^{-az^2} dz = \underbrace{\int_{-R}^R e^{-at^2} dt}_{I_1(R)} + \underbrace{\int_0^{\frac{x}{2a}} e^{-a(R+it)^2} i dt}_{I_2(R)} - \underbrace{\int_{-R}^R e^{-a(t+\frac{ix}{2a})^2} dt}_{I_3(R)} - \underbrace{\int_0^{\frac{x}{2a}} e^{-a(-R+it)^2} dt}_{I_4(R)}$$

Premièrement, $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_1(R) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ car c'est une intégrale de Gauss.

Comme $|e^{-a(R+it)^2}| \leq e^{-a(R^2-t^2)}$ et $|e^{-a(-R+it)^2}| \leq e^{-a(R^2-t^2)}$ et $\lim_{R \rightarrow +\infty} e^{-aR^2} \int_0^{\frac{x}{2a}} e^{at^2} dt = 0$ alors $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_2(R) = 0$ et $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_4(R) = 0$.

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|e^{-a(t+\frac{ix}{2a})^2} \mathbb{1}_{[-R,R]}(t)| \leq e^{-at^2} e^{\frac{x^2}{4a}}$ et comme $t \mapsto e^{-at^2}$ est intégrable (et indépendante de R) alors par convergence dominée, $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_3(R) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(t+\frac{ix}{2a})^2} dt$.

Ainsi, $\int_{\mathbb{R}} e^{-a(t+\frac{ix}{2a})^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{\gamma}_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a}\right)$. $\square$

La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.
 $f \mapsto \hat{f}$

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} = 0$. Montrons que $f = 0$. Posons pour $s > 0$, l'application $\varphi_s : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2s\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2s}\right)$ et $g_s : t \mapsto \varphi_s(t)e^{ixt}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Comme $f, g_s \in L^1(\mathbb{R})$ alors par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t)g_s(u)e^{-itu}| dt du = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g_s(u)| du \right) = \|f\|_1 \|g_s\|_1 < +\infty$$

Puis par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}_s(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} g_s(u)e^{-itu} du \right) dt = \int_{\mathbb{R}} g_s(u) \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itu} dt \right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u)g_s(u) du = 0 \quad \text{car } \hat{f} = 0 \end{aligned}$$

Et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_s(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_s(u)e^{ixu}e^{-itu} du = \hat{\varphi}_s(t-x) = \hat{\varphi}_s(x-t)$ car $\hat{\varphi}_s$ est paire.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \hat{g}_s(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \hat{\varphi}_s(x-t) dt = f * \hat{\varphi}_s(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2s\pi}} (f * \hat{\gamma}_{1/2s})(x) = \frac{\sqrt{2s\pi}}{\sqrt{2s\pi}} (f * \gamma_{s/2})(x) \quad \text{par le lemme} \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{s}} (f * \varphi_{s^{-1}})(x) \quad \text{car } \varphi_{s^{-1}}(t) = \sqrt{\frac{s}{2\pi}} e^{-\frac{st^2}{2}}
\end{aligned}$$

On a $\|\varphi_{s^{-1}}\|_1 = 1$ et $\varphi_{s^{-1}} \geq 0$. De plus, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\int_{|x|>\varepsilon} \varphi_{s^{-1}}(x) dx = 1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sqrt{\frac{s}{2\pi}} e^{-\frac{sx^2}{2}} dx \underset{t=\sqrt{s}x}{=} 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\sqrt{s}\varepsilon}^{\sqrt{s}\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\xrightarrow{s \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi}} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$$

par convergence dominée. Ainsi, $(\varphi_{s^{-1}})_{s>0}$ est une approximation de l'unité. Or pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $(f * \varphi_{s^{-1}})_{s>0}$ converge vers f lorsque $s \rightarrow +\infty$. Donc,

$$\|f\|_1 = \lim_{s \rightarrow +\infty} \|f\|_1 = \lim_{s \rightarrow +\infty} \underbrace{\|f * \varphi_{s^{-1}} - f\|_1}_{=0} = 0$$

Ainsi, $f = 0$. D'où la linéarité de $\mathcal{F}$ et donc elle est injective. $\square$

Proposition : Si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité alors $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $(f * \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Démonstration. Grâce au lemme 1 du développement sur le théorème de Weierstrass, on a que si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$, alors $(f * \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f . Montrons déjà le résultat si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$. Soit $R > 0$ tel que $\text{Supp}(f) \subset [-R, R]$.

$$\begin{aligned}
\|f * \varphi_n - f\|_p &\leq \|(f * \varphi_n - f) \mathbb{1}_{\{|x| \leq 2R\}}\|_p + \|(f * \varphi_n - f) \mathbb{1}_{\{|x| > 2R\}}\|_p \\
&\leq (4R)^{1/p} \underbrace{\|f * \varphi_n - f\|_{\infty}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\|f * (\varphi_n \mathbb{1}_{\{|x| > R\}})\|_p}_{\leq \|f\|_p \|\varphi_n \mathbb{1}_{\{|x| > R\}}\|_1}
\end{aligned}$$

Comme $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité alors $\|\varphi_n \mathbb{1}_{\{|x| > R\}}\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ce qui montre la proposition dans le cas où $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$. On conclut grâce à la densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$. $\square$