# Fonction Zêta et nombres premiers

- Garet, Kurtzmann, *De l'intégration aux probabilités.* (56-57, 462-463)

**Développement eulérien de Zêta :**
Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers. Alors, $\forall s > 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{1-p_i^{-s}}$$

*Démonstration.* Soit $s > 1$. On note $\mu_s$ la mesure de probabilité (c'est la loi de Zêta de paramètre $s$) définie sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mu_s(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$$

Or $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mu_s(p\mathbb{N}^*) = \mu_s\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty}\{pn\}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mu_s(\{pn\}) = \frac{1}{\zeta(s)p^s}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{p^s}$.
On pose alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'événement $A_i = p_i\mathbb{N}^*$.

- $\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i^c$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls qui ne sont multiples d'aucun nombre premier, autrement dit qui ne sont divisibles par aucun nombre premier. Or 1 est le seul entier naturel qui n'ait pas de facteur premier, d'où l'identité $\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i^c = \{1\}$.

Si on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcap_{i=0}^{n} A_i^c$ alors la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Ainsi, par le théorème de continuité séquentielle décroissante

$$\lim_{n\to+\infty}\mu_s(B_n) = \mu_s\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \mu_s\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i^c\right) = \mu_s(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

- D'autre part, comme les $p_i$ sont premiers, ils sont premiers entre eux, d'où

$$\forall I \subset \mathbb{N} \text{ fini},\quad \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} p_i\mathbb{N}^* = \Big(\prod_{i\in I} p_i\Big)\mathbb{N}^*$$

Ainsi, $\forall I \subset \mathbb{N}$ fini, $\mu_s\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \mu_s\left(\Big(\prod_{i\in I} p_i\Big)\mathbb{N}^*\right) = \frac{1}{\Big(\prod_{i\in I} p_i\Big)^s} = \prod_{i\in I}\frac{1}{p_i^s} = \prod_{i\in I}\mu_s(A_i)$.
Donc, les $A_i$ sont indépendants sous $\mu_s$ et les $A_i^c$ aussi. Ainsi,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \mu_s\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i^c\right) = \prod_{i=0}^{+\infty}\mu_s(A_i^c) = \prod_{i=0}^{+\infty}\big(1-\mu_s(A_i)\big) = \prod_{i=0}^{+\infty}\big(1-p_i^{-s}\big)$$

□

**Corollaire :** Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite croissante des nombres premiers. Alors $\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{p_i}$ diverge.

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde, supposons que $\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{p_i}$ converge.
Comme $-\ln(1-p_i^{-1}) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_i}$, par le théorème des équivalents de séries à termes positifs (car $1-p_i^{-1} \in ]0,1[$) alors $\sum_{i\in\mathbb{N}}\ln\left(\frac{1}{1-p_i^{-1}}\right)$ converge.

Or $\forall s > 1,\ \forall i \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{1-p_i^{-s}} \leqslant \dfrac{1}{1-p_i^{-1}}$. Donc $\forall s > 1,\ \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{1}{1-p_i^{-s}}\right)$ converge aussi, par croissance du logarithme et par le théorème de comparaison. Or $\forall s > 1$,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{1-p_i^{-s}}\right) = \ln\left(\prod_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{1-p_i^{-s}}\right) = \ln(\zeta(s))$$

Comme, $\displaystyle\lim_{s\to 1^+} \zeta(s) = +\infty$ alors $\displaystyle\lim_{s\to 1^+} \ln(\zeta(s)) = +\infty$. Ce qui est absurde. $\square$