Équation de la chaleur sur le cercle

- Isenmann, Pecatte, *L'oral à l'agrégation de mathématiques.* (170-175)

Soit $u_0 \in L^2([0,2\pi])$ dont on note $\forall n \in \mathbb{Z}$, d_n ses coefficients de Fourier. Il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

- $\forall t > 0$, $u(t,\cdot)$ est 2π-périodique.
- les fonctions $\partial_t u$ et $\partial_{xx} u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et $\partial_t u = \partial_{xx} u$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.
- $u(t,\cdot) \xrightarrow[t \to 0]{L^2} u_0$.

De plus, la fonction u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Démonstration.

- **Analyse :** Supposons qu'il existe u une telle fonction. Soit $t > 0$. Comme $u(t,\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, alors d'après le théorème de Dirichlet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(t,x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(t) e^{inx} \quad \text{où} \quad c_n(t) = c_n\big(u(t,\cdot)\big) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} u(t,x)\,\mathrm{d}x$$

Donc, la donnée de $(c_n(t))_{t>0}$ nous permettra de déterminer u. On cherche donc à calculer ces coefficients à l'aide d'équations différentielles.
On doit dériver l'expression de $c_n(t)$ sous signe intégral sur un segment $I \subset \mathbb{R}^{+*}$:

- ⋆ $\forall x \in [0,2\pi],\ t \mapsto e^{-inx} u(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- ⋆ $\forall t \in I,\ x \mapsto e^{-inx} u(t,x)$ est continue (donc mesurable) sur $[0,2\pi]$.
- ⋆ $\forall (t,x) \in I \times [0,2\pi]$, $|e^{-inx} \partial_t u(t,x)| \leqslant \sup\limits_{[0,2\pi]\times I} |\partial_t u| = \text{cste}$ (intégrable sur $[0,2\pi]$).

Le théorème de dérivation sous signe intégral assure que c_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment I de $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} c_n'(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \partial_t u(t,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \partial_{xx} u(t,x)\,\mathrm{d}x \\ &= c_n(\partial_{xx} u(t,\cdot)) = inc_n(\partial_x u(t,\cdot)) = -n^2 c_n(u(t,\cdot)) = -n^2 c_n(t) \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t > 0,\ c_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}$. Déterminons les réels α_n. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$

Comme $u_0, u(t,\cdot) \in L^2([0,2\pi])$, alors par la formule de Parseval, on a $\forall t > 0$,

$$\|u(t,\cdot) - u_0\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n e^{-n^2 t} - d_n|^2 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

par convergence dans L^2. Or chaque terme est positif, donc chacun tend vers 0.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n = d_n$. Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ u(t,x) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$.

- **Synthèse :** Montrons que la fonction u précédente convient.
  - ⋆ $\forall t > 0$, $u(t,\cdot)$ est 2π-périodique (car l'exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique).
  - ⋆ La formule de Parseval donne $\|u_0\|_2^2 = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2$. Donc $\forall n \in \mathbb{Z},\ |d_n| \leqslant \|u_0\|_2$.

$$\forall t \geqslant t_0, \quad \left| d_n \frac{\partial^a e^{-n^2 t}}{\partial t^a} \frac{\partial^b e^{inx}}{\partial x^b} \right| = |d_n (-n^2)^a e^{-n^2 t} (in)^b e^{inx}| \leqslant \|u_0\|_2 |n|^{2a+b} e^{-n^2 t_0}$$

Comme la série de droite est convergente et indépendante de t et de x, alors la série de terme général $d_n(-n^2)^a e^{-n^2 t}(in)^b e^{inx}$ est normalement convergente.
Ainsi, u et toutes ses dérivées convergent normalement sur $[t_0, +\infty[\times\mathbb{R}$.
On en déduit que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[t_0, +\infty[\times\mathbb{R}$ pour tout $t_0 > 0$, donc sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. De plus, $\partial_t u$ et $\partial_{xx} u$ sont continues.

- ⋆ Par convergence normale, on peut dériver terme à terme et sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, $\partial_t u = \partial_{xx} u$.
- ⋆ En appliquant le théorème de Parseval à $u(t, \cdot) - u_0$, on a

$$\|u(t,\cdot) - u_0\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n - c_n(t)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^2 |1 - e^{-n^2 t}|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^2 = \|u_0\|_2^2 < +\infty$$

encore une fois par le théorème de Parseval pour $u_0 \in L^2([0, 2\pi])$.
On a donc une majoration qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée (indépendante de t) :

$$\lim_{t\to 0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |d_n|^2 |1 - e^{-n^2 t}|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lim_{t\to 0} |d_n|^2 |1 - e^{-n^2 t}|^2 = 0$$

Donc, $u(t, \cdot)$ converge vers u_0 dans $L^2([0, 2\pi])$ lorsque $t \to 0$. □