

Théorème de Riesz

- Gourdon, *Analyse*. (50)

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension n . Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, définissons la norme $N_0(x) = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$ sur E .

Soit N une autre norme sur E . Montrons que N est équivalente à N_0 .

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \quad N(x) \leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| \underbrace{\sum_{i=1}^n N(e_i)}_a = a N_0(x)$$

Munissons $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow (E, N_0) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{aligned}$$

est une isométrie donc elle est continue. Comme $S = \{x \in E, N_0(x) = 1\}$ est l'image de la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ qui est compact par φ continue alors S est un compact de (E, N_0) . Or par l'inégalité triangulaire inverse, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq a N_0(x - y)$.

Ainsi $N : (E, N_0) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est a -lipschitzienne donc continue.

Comme S est un compact de (E, N_0) alors il existe $x_0 \in S$ tel que $N(x_0) = \inf_{x \in S} N(x) > 0$ (car $N_0(x_0) = 1$ donc $x_0 \neq 0$). Ainsi, $\forall x \in E \setminus \{0\}$,

$$N(x) = N_0(x) \cdot \underbrace{N\left(\frac{x}{N_0(x)}\right)}_{\in S} \geq b N_0(x) \quad \text{où } b = N(x_0)$$

Ainsi, toute norme sur E est équivalente à N_0 . Finalement, par transitivité toutes les normes sont équivalentes entre elles. □

Théorème de Riesz : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Alors la boule unité fermée de E est compacte ssi E est de dimension finie.

Démonstration. Notons $B = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de E .

($\Rightarrow$) Supposons que B est compacte. Pour $x \in B$, posons $B_x = \{y \in B, \|y - x\| < \frac{1}{2}\}$.

Alors, $B \subset \bigcup_{x \in B} B_x$ et pour tout $x \in B$, B_x est un ouvert de B .

Ainsi, par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe $(x_1, \dots, x_n) \in B$ tels que $B \subset \bigcup_{i=1}^n B_{x_i}$.

On pose alors $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Montrons que $F = E$. Supposons pour cela par l'absurde que $F \neq E$. Comme $F \subset E$ alors il existe $e \in E \setminus F$.

Posons $d = \inf\{\|e - z\|, z \in F\}$. Comme $e \notin F$ alors $d > 0$.

En effet, comme F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie alors F est fermé donc si $d = 0$ alors $e \in \bar{F} = F$. Ce qui est impossible.

Soit $z \in F$ tel que $\|e - z\| \leq \frac{3}{2}d$. Comme $e \notin F$ alors $e \neq z$ donc $\|e - z\| \neq 0$.

Posons alors $x = \frac{e - z}{\|e - z\|}$. Ainsi, $\|x\| = 1$ donc $x \in B$. Par conséquent, il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$

tel que $x \in B_{x_{i_0}}$ i.e. $\|x - x_{i_0}\| < \frac{1}{2}$ donc $\|e - z - x_{i_0}\|e - z\| < \frac{1}{2}\|e - z\| \leq \frac{3}{4}d$.

Posons $y = z + x_{i_0}\|e - z\| \in F$ car $z, x_{i_0} \in F$ (un sous-espace vectoriel). De plus,

$$\|e - y\| < \frac{3}{4}d < d = \inf\{\|e - z\|, z \in F\}$$

Ce qui est absurde car $d > 0$. Donc $F = E$ et E est de dimension finie.

($\Leftarrow$) Si E est de dimension finie n alors on peut choisir une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E .

En reprenant l'application φ définie précédemment, on note que c'est un homéomorphisme. Donc la boule unité fermée B_0 de (E, N_0) est homéomorphe à la boule unité fermée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ qui est compacte. Ainsi, B_0 est compacte pour N_0 et comme on est en dimension finie toutes les normes sont équivalentes alors B_0 est compacte pour $\|\cdot\|$.

De plus, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in E, N_0(x) \leq \alpha\|x\|$. Donc, B est incluse dans l'image αB_0 par l'homothétie de rapport α de B_0 . Comme les homothéties vectorielles sont continues dans $(E, \|\cdot\|)$ et que B_0 est compact dans $(E, \|\cdot\|)$ alors αB_0 aussi. Comme B est un sous-ensemble fermé de αB_0 , alors il est aussi compact. $\square$