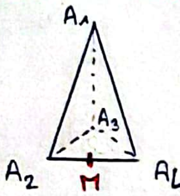
Isométrie du tétraèdre et du cube [H2G2]

1. $Is(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $Is^+(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$



Les points extrémaux du tétraèdre sont ses sommets.
On note $X = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

Alors $Is(\Delta_4) = Is(X)$ et $Is^+(\Delta_4) = Is^+(X)$

On fait agir $Is(X)$ sur X : $\begin{array}{rcl} Is(X) \times X & \longrightarrow & X \\ (f, A_i) & \longmapsto & f(A_i) \end{array}$

On a alors un morphisme $\varphi : \begin{array}{rcl} Is(X) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(X) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ f & \longmapsto & \sigma_f : \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & X \\ A_i & \longmapsto & f(A_i) \end{array} \end{array}$

• L'action est fidèle

Si $f \in \operatorname{Ker}\varphi$, $f(A_i) = A_i$, $\forall i$, alors f stabilise X qui est un repère affine de $\mathbb{R}^4$, donc $f = id_{\mathbb{R}^4}$, donc φ injective.

(si on note s la réflexion on a $(A_2A_4) = \varphi(s)$)

• φ surjective

On note M milieu de $[A_2A_4]$. La réflexion par rapport au plan MA_1A_3 admet pour image la transposition (A_2A_4)

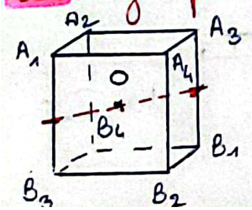
On vérifie ainsi que toutes les transpo sont ds l'image par φ de $Is(X)$. Comme les transpo engendrent $\mathfrak{S}_4$, on en déduit la surjectivité.

donc φ isomorphisme.

donc $Is(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$.

De plus, $Is^+(\Delta_4)$ est d'indice 2 dans $Is(\Delta_4)$, donc $Is^+(\Delta_4) \simeq \mathfrak{A}_4$ ■

2. Les groupes d'iso du cube : $Is^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $Is(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$



Soit les 4 grandes diagonales du cube :
$\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$

On fait agir $Is^+(C_6)$ sur $\mathcal{D}$.

On obtient un morphisme :

$\varphi : \begin{array}{rcl} Is^+(C_6) & \longmapsto & \mathfrak{S}(\mathcal{D}) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ f & \longmapsto & \sigma_f : \begin{array}{rcl} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ D_i & \longmapsto & f(D_i) \end{array} \end{array}$

• Injectivité

Soit $f \in Is^+(C_6)$ tq $f \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $\varphi(f) = id$
donc $\forall i$, $f(D_i) = D_i$ avec $D_i = [A_iB_i]$ la $\ominus$ grande diago.
Comme celle ci est fixée par f, et que A_i et B_i en sont les pts extrémaux, soit f permute A_i et B_i, soit f les laisse fixe.

Cas 1 Supposons f fixe A_i (et dc B_i) pour i donné et laisse fixe globalement les autres diagonales.
Supp sans perte de généralité $i = 1$.
Comme $A_1A_2 \neq A_1B_2$ et f isométrie, on a : f ne peut pas envoyer A_2 sur B_2
donc par élimination, $\begin{cases} A_2 \text{ envoyé sur } A_2 \\ B_2 \text{ '' sur } B_2 \end{cases}$
De m̂, A_4 envoyé sur A_4 et A_3 sur A_3
or (A_1, A_2, A_3, A_4) repère affine de l'espace, donc $f = id$.
(ou on peut prendre (A_1, A_2, B_1, B_2) ra)

Cas 2 Si à i fixé, f envoie A_i sur B_i, alors $s_0 \circ f$ (où s_0 est la symétrie centrale du cube, O centre du cube) envoie A_i sur A_i
et d'après ce qui précède, cela implique $s_0 \circ f = id$ ($\Rightarrow s_0^2 f = s_0 \Rightarrow f = s_0$)
Impossible car $f \in Is^+(C_6)$ et $s_0 \in Is^-(C_6)$

dc $\operatorname{Ker}\varphi = \{id\}$

• Surjectivité les transpo sont toutes réalisées (ici grâce à des retournement d'axes reliant les milieux des arêtes joignant les diagonales)

et donc $Is^+(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4$ car φ isomorphisme.

Comme O centre de symétrie, $Is(C_6) \simeq Is^+(C_6) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

d'où $Is(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. ■