

Formule de Stirling (intégrales de Wallis)

- Gourdon, *Analyse*. (130, 219-220)

Formule de Wallis : $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{2p(2p-2) \cdots 2}{(2p-1)(2p-3) \cdots 1} \right)^2 = \pi.$

Démonstration. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$.

Pour $n \geq 2$, en intégrant par parties on a

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x) \sin(x) dx \\ &= \left[-\sin^{n-1}(x) \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) dx \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) (1 - \sin^2(x)) dx \\ &= (n-1)(W_{n-2} - W_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \geq 2$, $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$.

Comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \left[-\cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{2p(2p-2) \cdots 2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2p(2p-2) \cdots 2}{(2p+1)(2p-1) \cdots 1} \quad (\star)$$

D'autre part, comme $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \sin^{2p+1}(x) \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x)$ alors par intégration, on a $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{2p+1} \leq W_{2p} \leq W_{2p-1} \quad \text{donc} \quad 1 \leq \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} \leq \frac{W_{2p-1}}{W_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p}$$

Par le théorème des gendarmes, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{W_{2p}}{W_{2p+1}} = 1$ soit

$$(2p+1) \left(\frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{2p(2p-2) \cdots 2} \right)^2 \frac{\pi}{2} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$$

On a donc $p \left(\frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{2p(2p-2) \cdots 2} \right)^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi}$. D'où la formule de Wallis. □

Formule de Stirling : $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$

Démonstration. Posons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_n &= \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln \left(\frac{(n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}}{n^n \sqrt{n}} \times \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} \times \frac{n!}{(n+1)!} \right) \\
&= \ln \left(\frac{1}{e} \times \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} \right) = \ln \left(\frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
&= -\ln(e) + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\
&= -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \\
&= -1 + 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)
\end{aligned}$$

Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |v_n|$ converge donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge (absolument convergente $\Rightarrow$ convergente).

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n v_k = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$ alors $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. On voit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $e^\ell > 0$. Notons $\frac{1}{k} = e^\ell$.

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k} \quad \text{donc} \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} k \sqrt{n} n^n e^{-n} \quad (\star)$$

Calculons la constante k :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} \left(\frac{2p(2p-2) \cdots 2}{(2p-1)(2p-3) \cdots 1} \right)^2 &= \frac{1}{p} \left(\frac{(2p)^2(2p-2)^2 \cdots 2^2}{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3) \cdots 2 \times 1} \right)^2 \\
&= \frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \right)^2 \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{\underset{(\star)}{\sim}} \frac{1}{p} \left(\frac{2^{2p}(k\sqrt{p} p^p e^{-p})^2}{k\sqrt{2p}(2p)^{2p} e^{-2p}} \right)^2 = \frac{1}{p} \left(\frac{k\sqrt{p}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{k^2}{2}
\end{aligned}$$

La formule de Wallis et l'unicité de la limite nous donne donc que $\pi = \frac{k^2}{2}$.

Finalement, $k = \sqrt{2\pi}$. D'où la formule de Stirling. □