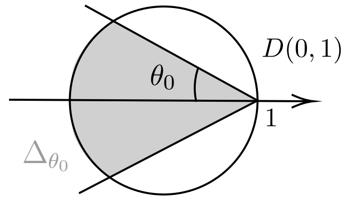
Théorème d'Abel angulaire et théorème de taubérien faible

- Gourdon, *Analyse.* (263-264)

Théorème d'Abel :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $\geqslant 1$ telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de $\sum a_n z^n$ sur $D(0,1)$.
On fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose :
$\Delta_{\theta_0} = \{1 - \rho e^{i\theta},\ \rho > 0,\ \theta \in [-\theta_0, \theta_0]\} \cap D(0,1)$.
Alors, $\displaystyle\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.



Démonstration. Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. On souhaite évaluer $|f(z) - S|$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n (z^n - 1) && \text{(les 1}^{\text{ers}}\text{ termes se soustraient)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) && \text{transformation d'Abel} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n (z^n - 1) && \text{(1}^{\text{er}}\text{ terme nul)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{R_N} (\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{z^N} - 1)
\end{aligned}$$

Donc lorsque $N \to +\infty$, $f(z) - S = (z-1) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum a_n$ converge alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |R_n| < \varepsilon$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

$$\begin{aligned}
|f(z) - S| &= |z-1| \left| \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \right| \\
&\leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N-1} |R_n z^n| + \varepsilon |z-1| \sum_{n=N}^{+\infty} |z|^n \\
&\leqslant |z-1| \sum_{n=0}^{N-1} |R_n z^n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} && \text{car } |z| < 1
\end{aligned}$$

Si $z \in \Delta_{\theta_0}$, alors $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ et $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2$ et $\rho > 0$.

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho(1+|z|)}{2\rho\cos\theta - \rho^2} \leqslant \frac{2}{2\cos\theta_0 - \rho} \leqslant \frac{2}{\cos\theta_0}$$

si $\rho \leqslant \cos\theta_0$ (licite car $z \to 1$).
De plus, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |R_n|$ est une constante donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |R_n| < \varepsilon$.
Si on prend $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $\rho = |z-1| \leqslant \min\{\alpha, \cos\theta_0\}$. Ainsi, $|f(z) - S| \leqslant \varepsilon + \dfrac{2\varepsilon}{\cos\theta_0}$. □

Théorème de taubérien faible : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. Notons f sa somme sur $D(0,1)$. On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = S$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} n a_n = 0$ alors $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge et $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]0,1[$.

$$S_n - f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

Comme $\dfrac{1-x^k}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{k-1} \leqslant k$ car $0 < x < 1$. Ainsi, $1 - x^k \leqslant k(1-x)$.

Donc, $|S_n - f(x)| \leqslant (1-x) \sum\limits_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{\dfrac{k}{n}}_{>1} \times |a_k| x^k$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n a_n = 0$ alors $(n|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ admet un majorant M. Ainsi,

$$\begin{aligned} |S_n - f(x)| &\leqslant (1-x)Mn + \sup_{k>n}(k|a_k|) \times \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \\ &\leqslant (1-x)Mn + \sup_{k>n}(k|a_k|) \frac{1}{n(1-x)} \qquad \text{car } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \dfrac{\varepsilon}{n} \in]0,1[$. Donc,

$$\left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leqslant \varepsilon M + \frac{1}{\varepsilon} \sup_{k>n} k|a_k|$$

Comme $k|a_k| \to 0$ alors prenons $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup\limits_{k > N_0} k|a_k| < \varepsilon^2$.

Or $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = S$, donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1$, $\left| f\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{n}\right) - S \right| < \varepsilon$.

Ainsi, $\forall n \geqslant \max(N_0, N_1)$, on a

$$|S_n - S| \leqslant \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S \right| \leqslant \varepsilon M + \varepsilon + \varepsilon$$

Donc $S_n \to S$. □

Remarque. Le théorème d'Abel est un résultat de continuité et pas de prolongement.

Application : Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{in\theta}}{n} = -\mathrm{Log}(1 - e^{i\theta})$.

- On utilise le critère d'Abel pour montrer la convergence de la série.

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et tend vers 0. De plus, $\sum e^{in\theta}$ est bornée :

$$\left| \sum_{n=1}^{N} (e^{i\theta})^n \right| = \left| e^{i\theta} \frac{1 - e^{iN\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leqslant \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2(\theta)}} = \frac{2}{\sqrt{2 - 2\cos\theta}} = \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$$

- Pour $z \in D(0,1)$, $\mathrm{Log}(1-z) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$ donc $\mathrm{Log}(1 - e^{i\theta} z) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{in\theta}}{n} z^n$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} \overset{\text{Abel}}{=} \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in]0,1[}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} z^n = \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in]0,1[}} \mathrm{Log}(1 - e^{i\theta} z) = \mathrm{Log}(1 - e^{i\theta})$$

car Log est continue sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$ et si $z = 1$ alors $1 - e^{i\theta} z \notin \mathbb{R}^-$.

- $1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -e^{i\theta/2} 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta - \pi}{2}}$ et $\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$

alors $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(n\theta)}{n} = \mathrm{Re}(-\mathrm{Log}(1 - e^{i\theta})) = -\ln(2\sin\theta/2)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(n\theta)}{n} = -\dfrac{\theta - \pi}{2}$.