

Développement asymptotique de suites récurrentes

- Bernis, *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements.* (145-153)

Soit $b > 0$. Soit $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ croissante, continue et telle que

- $f(0) = 0$ et $\forall x \in]0, b]$, $f(x) < x$.
- il existe $\lambda > 0$ et $r > 1$ tels que $f(x) = x - \lambda x^r + o_{x \rightarrow 0}(x^r)$.

On pose pour tout $c \in]0, b[$, la suite définie par $u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]0, b[$, tend vers 0 et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$.

Démonstration.

• Comme f est croissante et s'annule en 0 alors si elle s'annulait $y \in]0, b[$, f serait nulle sur $[0, y]$, ce qui contredirait le développement limité de f . Donc $\forall x \in]0, b[$, $0 < f(x) < x < b$. Comme $u_0 = c \in]0, b[$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien à valeurs dans $]0, b[$.

• Comme f est croissante alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone ($u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ est de même signe que $u_{n+1} - u_n$ par croissance de f). Or d'après la première propriété de f , $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 < 0$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

La suite étant décroissante et minorée par 0 alors par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une certaine limite $\ell \in [0, b]$.

Comme f est continue alors ℓ est un point fixe de f . Or $\forall x \in]0, b]$, $f(x) < x$ et $f(0) = 0$. Donc $\ell = 0$. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

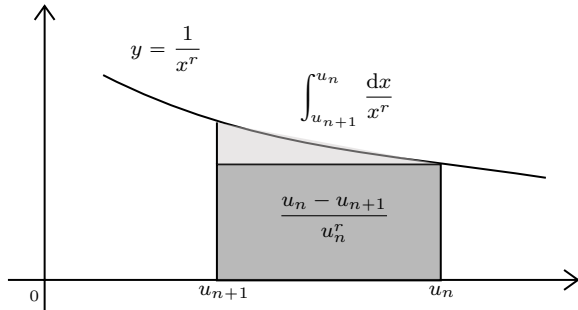
- Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \lambda u_n^r + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^r)$. Donc,

$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} = \lambda + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad \text{i.e.} \quad \lambda \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r}$$

La figure suggère que

$$\begin{aligned} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{dx}{x^r} \\ &= \frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{1-r} \end{aligned}$$

Montrons-le.



$$\begin{aligned} u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r} &= u_n^{1-r} - f(u_n)^{1-r} = u_n^{1-r} - \left(u_n - \lambda u_n^r + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^r)\right)^{1-r} \\ &= u_n^{1-r} \left[1 - \underbrace{\left(1 - \lambda u_n^{r-1} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^{r-1})\right)^{1-r}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}\right] \\ &= u_n^{1-r} \left[1 - \left(1 - (1-r)\lambda u_n^{r-1} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^{r-1})\right)\right] \\ &= (1-r)\lambda + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \end{aligned}$$

Donc $\frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{1-r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda$. Comme $\lambda > 0$ et $\frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{1-r} > 0$, alors par divergence de $\sum \lambda$, on a par comparaison de sommes partielles de séries à termes positifs

$$n\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k^{1-r} - u_{k+1}^{1-r}}{1-r} = \frac{u_0^{1-r} - u_n^{1-r}}{1-r} \quad \text{donc} \quad \frac{u_n^{1-r}}{n\lambda(r-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$. □

Application : Pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$, on a le développement asymptotique

$$u_n = \frac{2}{n} + \frac{2 \ln n}{3n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln n}{n^2} \right)$$

Démonstration.

• Vérifions les hypothèses : Soit $b > 0$. On a f continue sur $[0, b]$, $f(0) = \ln(1) = 0$ et par stricte concavité, $\forall x \in]0, b]$, $f(x) < x$. De plus, on a le développement limité

$$f(x) = \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

donc $\lambda = \frac{1}{2} > 0$ et $r = 2 > 1$. D'après la proposition, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{2}(2-1) \right)^{\frac{1}{1-2}} = \frac{2}{n}$.

• Pour obtenir un développement asymptotique, il faut reprendre le développement de

$$\frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{1-r} = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} :$$

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} &= \ln(1+u_n)^{-1} - u_n^{-1} = \left(u_n - \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^3) \right)^{-1} - u_n^{-1} \\ &= u_n^{-1} \left(\left(1 - \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{3} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^2) \right)^{-1} - 1 \right) \\ &= u_n^{-1} \left(\frac{u_n}{2} - \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^2}{4} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^2) \right) = \frac{1}{2} - \frac{u_n}{12} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n) \end{aligned}$$

Si on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1} - \frac{1}{2}$ donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12}u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6n}$.

• Par le théorème d'équivalence des sommes partielles de séries divergentes à termes de

signe constant : $\sum_{k=0}^{n-1} x_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6} \ln n$. Donc par télescopage

$$u_n^{-1} - u_0^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1}) = \frac{n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{n}{2} - \frac{1}{6} \ln n + o_{n \rightarrow +\infty}(\ln n)$$

Donc
$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{6} \ln n + o_{n \rightarrow +\infty}(\ln n) \right)^{-1} = \frac{2}{n} \left(1 - \frac{\ln n}{3n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right) \right)^{-1} \\ &= \frac{2}{n} \left(1 + \frac{\ln n}{3n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right) \right) = \frac{2}{n} + \frac{2 \ln n}{3n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln n}{n^2} \right) \end{aligned} \quad \square$$

Proposition : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$.

Démonstration. Pour $n \geq 2$, on pose $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{dt}{t}$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} - \left[\ln t \right]_{n-1}^n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = -\frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Par télescopage $\sum_{k=2}^n a_k = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1) \right) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = H_n - 1 - \ln(n)$.

Par comparaison avec l'intégrale de Riemann, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge. Donc

$$H_n = \ln(n) + 1 + \sum_{k=2}^n a_k = \ln(n) + 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} a_k}_{=\gamma} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad \square$$