Décomposition de Jordan (dualité)

- Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et géométrie.* (672-675)

Lemme 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$.
Pour $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $\mathcal{B}_{u,x} = (u^k(x))_{k \in [\![0,q-1]\!]}$ est libre et l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est stable par u.

Démonstration. Comme $u^{q-1} \neq 0$ alors il existe $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$.
Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$.

$$0 = u^{q-1}\left(\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x)\right) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^{q+k-1}(x) = \lambda_0 u^{q-1}(x)$$

Ainsi, $\lambda_0 = 0$. Par récurrence, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{q-1} = 0$. Donc $\mathcal{B}_{u,x}$ est une famille libre.
Grâce à la nilpotence de u, on a stabilité de F par u. □

Lemme 2 : Il existe $\varphi \in E^*$ tel que $G = H^\perp$ avec $H = \mathrm{Vect}\{\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi)\}$ et G est stable par u avec $E = F \oplus G$.

Démonstration.
- Comme u est nilpotent d'indice q alors ${}^t u$ aussi, appliquons le lemme 1 à ${}^t u$: pour $\varphi \in E^*$ tel que $({}^t u)^{q-1}(\varphi) \neq 0$, H est stable par ${}^t u$.

Donc $\varphi \circ u^{q-1} \neq 0$. Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $\varphi \circ u^{q-1}(x) \neq 0$. Comme $\varphi \in E^*$, alors $u^{q-1}(x) \neq 0$. On peut alors définir F comme dans le lemme 1.
Posons $G = H^\perp$. Comme H est stable par ${}^t u$ alors G est stable par u.
De plus, $\dim F = \dim H = q$, donc $\dim E = \dim G + \dim H = \dim G + \dim F$.

- Il faut alors vérifier que $F \cap G = \{0\}$.

Soit $y \in F \cap G$. Comme $y \in F$ alors $y = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x)$. Et comme $y \in G$ alors $u^{q-1}(y) \in G$ (car G est stable par u). Ainsi,

$$0 = \varphi(u^{q-1}(y)) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k \varphi(u^{q-1+k}(x)) = \lambda_0 \varphi(u^{q-1}(x))$$

Or $\varphi \circ u^{q-1}(x) \neq 0$, donc $\lambda_0 = 0$. Par récurrence $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{q-1} = 0$. Ainsi, $y = 0$.
Donc $F \cap G = \{0\}$. Par conséquent, $E = F \oplus G$. □

Décomposition de Jordan d'un endomorphisme nilpotent :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$. Il existe une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ de E telle que chaque sous-espace vectoriel $E_k = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_k)$ soit stable par u et la matrice de $u_{|E_k}$ est

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_k}(\mathbb{K}) \qquad \text{où } q_k = \dim E_k$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur $n = \dim E$.
Si $n = 1$ alors $u = 0$ donc le résultat est clair.

Supposons le résultat vrai pour tout rang $\leqslant n-1$, montrons-le au rang n.
Complétons la base $\mathcal{B}_{u,x}$ de F par $\mathcal{B}_G$ une base de G et posons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{u,x} \cup \mathcal{B}_G$. On a alors

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_q & 0 \\ 0 & A_{n-q} \end{pmatrix}$$

avec $q = \dim F$ et $A_{n-q} \in \mathcal{M}_{n-q}(\mathbb{K})$ la matrice de $u_{|G}$ dans $\mathcal{B}_G$.
Si $q = n$ alors c'est fini.
Si $q < n$ alors on utilise l'hypothèse de récurrence sur $u_{|G}$. $\square$

Décomposition de Jordan : Soit $u \in \mathcal{L}(E)\backslash\{0\}$ tel que χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$ de la forme $\chi_u(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix} \quad \text{avec } \forall k \in [\![1,r]\!],\ J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & \\ \varepsilon_{k,2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K})$$

où $\varepsilon_{k,i} \in \{0,1\}$. On l'appelle *forme réduite de Jordan.*

Démonstration. D'après le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r$ où $N_k = \operatorname{Ker}(u-\lambda_k \mathrm{Id})^{\alpha_k}$. Chaque N_k est de dimension α_k et est stable par u, ainsi l'endomorphisme $v_k = (u-\lambda_k\mathrm{Id})_{|N_k}$ est nilpotent d'indice la puissance associée à λ_k dans π_u. Par décomposition de Jordan pour un endormorphisme nilpotent, il existe une base $\mathcal{B}_k$ de N_k telle que :

$$Mat_{\mathcal{B}_k}(v_k) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \varepsilon_{k,2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon_{k,\alpha_k} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad Mat_{\mathcal{B}_k}(u_{|N_k}) = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & \\ \varepsilon_{k,2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix}$$

On obtient alors le résultat en concaténant les bases $\mathcal{B}_k$. $\square$