

Décomposition de Dunford et exponentielle de matrice

- Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et géométrie*. (603-604, 752)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dim finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé.

Alors, il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que

- $u = d + n$
- d diagonalisable, n nilpotent
- d et n commutent

De plus, d et n sont des polynômes en u .

Démonstration. Comme χ_u est scindé, on écrit $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ et $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

$N_k = \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$. On note p_k le projecteur de E sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{i \neq k} N_i$.

• **Existence :** D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_r$. Il suffit alors de définir d et n sur chaque N_k .

Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, posons $d_k = \lambda_k \text{Id}_{|N_k}$ et $n_k = u|_{N_k} - \lambda_k \text{Id}_{|N_k}$.

Donc $d_k, n_k \in \mathcal{L}(N_k)$ car N_k est stable par u et $d_k \circ n_k = n_k \circ d_k$.

Par définition, d_k est diagonale donc diagonalisable et on a bien $u|_{N_k} = d_k + n_k$.

Par définition de N_k , $n_k^{\alpha_k} = 0$. Posons alors $\alpha = \max_{k \in \llbracket 1, r \rrbracket} \alpha_k$.

On pose $d = \sum_{k=1}^r \lambda_k p_k$ et $n = u - d$. Comme les p_k sont des polynômes en u alors d et n

aussi, donc la commutativité de d et n vient de la commutativité dans $\mathbb{K}[u]$.

Ainsi, d est diagonalisable de même valeurs propres que u et $n^\alpha = 0$ sur chaque N_k donc sur E . D'où l'existence.

• **Unicité :** Supposons qu'il existe (d', n') une autre décomposition de Dunford de u .

Or, $u \circ d' = (d' + n') \circ d' = d' \circ (d' + n')$ car $d' \circ n' = n' \circ d'$. Ainsi, d' et n' commutent avec u et donc avec d et n (des polynômes en u).

Comme d et d' commutent et sont diagonalisables alors elles sont codiagonalisables, ainsi $d - d'$ est aussi diagonalisable.

Puisque n et n' sont nilpotents, alors il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $n^p = 0$ et $n'^q = 0$. Alors, par la formule de Leibniz (car n et n' commutent), on a $(n - n')^{p+q} = 0$.

Par conséquent, $d - d' = n - n'$ est diagonalisable et nilpotent, c'est donc l'endomorphisme nul. $\square$

Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$.
 A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable.

Démonstration.

($\Rightarrow$) Le sens direct est trivial qu'il y ait un scindage ou non (si $A = PDP^{-1}$ alors $e^A = Pe^D P^{-1}$).

($\Leftarrow$) Supposons que e^A est diagonalisable. Comme χ_A est scindé, utilisons la décomposition de Dunford de A : $A = D + N$. Puisque D et N commutent, on a $e^N = e^A e^{-D}$. En particulier, e^A et e^{-D} sont diagonalisables et commutent, donc sont codiagonalisables. Ainsi, e^N est lui aussi diagonalisable.

Soit q l'indice de nilpotence de N . Alors $e^N = \sum_{k=0}^q \frac{N^k}{k!}$. Donc $e^N - I_n = \sum_{k=1}^q \frac{N^k}{k!} = NP(N)$.

P est un polynôme en N donc N et $P(N)$ commutent. Ainsi $e^N - I_n$ est nilpotent et

diagonalisable (par codiagonalisation de e^N et I_n). Donc $e^N = I_n$ i.e. $\sum_{k=1}^q \frac{N^k}{k!} = 0$.

Or le polynôme minimal de N est X^q et il divise donc $\sum_{k=1}^q \frac{X^k}{k!}$. Donc $q = 1$ i.e. $N = 0$.

D'où $A = D$ diagonalisable. $\square$

Remarque.

- On peut calculer la décomposition de Dunford de e^A : $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une décomposition de Dunford (pas de commutativité). La décomposition est $A = A + 0$.
- Contre-exemple à l'application : Pour $e^A = I_n$, l'équation $e^z = 1$ a pour solution $z = 2ik\pi$. La matrice compagnon de $P(X) = (X - 2i\pi)(X + 2i\pi) = X^2 + 4\pi^2$ est $C_P = \begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ non diagonalisable sur $\mathbb{R}$. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$ fonctionne aussi.
- $\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$. L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $P \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k \right) P^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (PAP^{-1})^k$.

De plus, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue (car linéaire en dimension finie).

Par passage à la limite, on a le résultat.