

Théorème de Weierstrass (convolution)

- Gourdon, *Analyse*. (304-305)

On dit qu'une suite $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *approximation de l'unité* si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \chi_n \geq 0$
- $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \|\chi_n\|_1 = 1$
- $\forall \alpha > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|t| \geq \alpha} \chi_n(t) dt = 0$

Lemme 1 : Soit $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors $(f * \chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors d'après le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ (*)

D'autre part, par définition de l'approximation de l'unité, on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \int_{|t| \geq \alpha} \chi_n(t) dt \leq \varepsilon \quad (**)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \geq N$.

$$\begin{aligned} |\chi_n * f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t) f(x-t) dt - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t) f(x-t) dt - f(x) \|\chi_n\|_1 \right| \quad \text{car } \|\chi_n\|_1 = 1 \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t) (f(x-t) - f(x)) dt \right| \quad \text{car } \chi_n \geq 0 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \chi_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt \\ &\leq \int_{|t| \geq \alpha} \chi_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \chi_n(t) |f(x-t) - f(x)| dt \\ &\leq \int_{|t| \geq \alpha} \chi_n(t) 2\|f\|_{\infty} dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \chi_n(t) \varepsilon dt \quad \text{par (*)} \\ &\leq 2\varepsilon \|f\|_{\infty} + \varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \chi_n(t) dt}_{=1} \quad \text{par (**)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\|\chi_n * f - f\|_{\infty} \leq \varepsilon(2\|f\|_{\infty} + 1)$. D'où la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. □

Lemme 2 : On considère $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'approximation de l'unité définie par

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} & \text{où } a_n &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \\ t &\mapsto \frac{(1-t^2)^n}{a_n} \mathbb{1}_{\{|t| \leq 1\}} \end{aligned}$$

Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, f * p_n$ est une fonction polynomiale sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Démonstration. Soit $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $p_n * f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} p_n(x-t)f(t) dt$.

Pour $x, t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $|x-t| \leq 1$ donc en développant

$$p_n(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n} = \sum_{k=0}^{2n} q_k(t)x^k$$

où q_k est un polynôme en t . Ainsi, $f * p_n$ est bien un polynôme en x sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:

$$f * p_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q_k(t)f(t) dt$$

D'après le lemme 1, $(f * p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. $\square$

Théorème de Weierstrass : Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes.

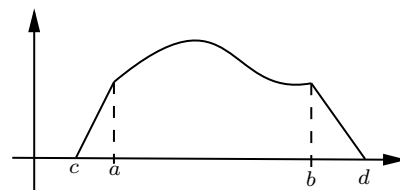
Démonstration. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Soit $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $[a, b] \subset [c, d]$.

On prolonge f sur $[c, a]$ par une fonction affine prenant 0 en c et $f(a)$ en a et sur $[b, d]$ en prenant $f(b)$ en b et 0 en d . Puis on la prolonge sur $\mathbb{R}$ par 0 en dehors de $[c, d]$. Donc $\tilde{f} \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Par changement de variables, on se ramène à

$$[c, d] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Donc, d'après le lemme 2, elle est limite uniforme de polynômes. $\square$



Application : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$. Alors, $f \equiv 0$.

Démonstration. Par linéarité, on a pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 P(t)f(t) dt = 0$.

Par le théorème de Weierstrass, il existe $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]$ qui converge vers f sur $[0, 1]$,

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 P_n(t)f(t) dt = 0. \text{ Or, } \left| \int_0^1 f(t)^2 dt - \int_0^1 P_n(t)f(t) dt \right| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\|f - P_n\|_\infty}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}.$$

$$\text{Donc, } \int_0^1 f(t)^2 dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t)f(t) dt = 0. \quad (*)$$

Si $\forall x \in [0, 1]$, $F(x) = \int_0^x f(t)^2 dt$ alors $F'(x) = f(x)^2 \geq 0$ et F est croissante avec $F(0) = 0$ et $F(1) = 0$ par $(*)$. Donc $F \equiv 0$ sur $[0, 1]$, ainsi f^2 puis f aussi. $\square$

Application : Le théorème de Weierstrass n'est plus valable si on remplace l'ensemble des fonctions continues sur un segment par l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Premièrement f est continue.

Montrons en fait que f est une fonction polynomiale. Le critère de Cauchy uniforme entraîne que $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.

Ainsi, $\forall n \geq N, P_N - P_n$ est une fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$, donc constante.

Autrement dit, $\forall n \geq N, \exists a_n \in \mathbb{R}, P_n = P_N + a_n$. Comme la suite $(P_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors la suite $(a_n)_{n \geq N} = (P_n(0) - P_N(0))_{n \geq N}$ aussi. Notons a sa limite. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_N(x) + a_n = P_N(x) + a$$

Donc, f est une fonction polynomiale. $\square$

Remarque. Le théorème de Stone-Weierstrass est une généralisation qui remplace $[a, b]$ par un espace compact quelconque.

Les applications ne viennent d'aucune source.