

Projection sur un convexe fermé

- Li, *Cours d'analyse fonctionnelle*. (32-34)

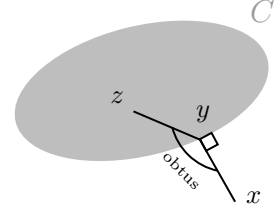
Soit $(H, (\cdot|\cdot))$ un Hilbert. Soit C un convexe, fermé, non vide de H .

Alors, $\forall x \in H, \exists ! y \in C, \|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\| := d$.

Et y s'appelle la projection de x sur C et la note $p_C(x)$.

On a la caractérisation :

$y = p_C(x)$ ssi $\forall z \in C, \operatorname{Re}(x - y | z - y) \leq 0$ et $y \in C$.



Démonstration. Soit $x \in H$.

- **Existence :** Définissons $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite minimisante de C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|x - z_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$$

Montrons que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Par l'égalité du parallélogramme, $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}\|u + v\|^2 + \frac{1}{2}\|u - v\|^2$

$$\|x - z_n\|^2 + \|x - z_p\|^2 = 2 \left\| x - \frac{z_n + z_p}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|z_n - z_p\|^2$$

Comme C est convexe alors $\frac{z_n + z_p}{2} \in C$. Ainsi, $\left\| x - \frac{z_n + z_p}{2} \right\|^2 \geq d^2$. D'où

$$\frac{1}{2} \|z_n - z_p\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n} + d^2 + \frac{1}{p} - 2d^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$$

Par conséquent, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.

Comme H est complet alors elle converge vers $y \in H$. Et C est fermé, donc $y \in C$.

- **Unicité :** Soient $y, y' \in C$ tels que $\|x - y\| = \|x - y'\| = d$.

L'égalité du parallélogramme donne :

$$\left\| \frac{y - y'}{2} \right\|^2 + \left\| x - \frac{y + y'}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + \frac{1}{2} \|x - y'\|^2 = d^2$$

Par convexité $\frac{y + y'}{2} \in C$ donc $\left\| x - \frac{y + y'}{2} \right\|^2 \geq d^2$.

Ainsi $\left\| \frac{y - y'}{2} \right\|^2 = 0$ i.e. $y = y'$. D'où l'unicité.

- **Caractérisation :**

($\Rightarrow$) Si $y = p_C(x)$ alors on a déjà $y \in C$. Soit $z \in C$.

Pour $t \in]0, 1[$, $(1 - t)y + tz \in C$ par convexité. Donc

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &\leq \|x - (1 - t)y - tz\|^2 = \|x - y + t(y - z)\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 + t^2 \|y - z\|^2 + 2t \operatorname{Re}(x - y | y - z) \end{aligned}$$

Ainsi, $0 \leq t^2 \|y - z\|^2 + 2t \operatorname{Re}(x - y | y - z)$.

Comme $t > 0$, alors $0 \leq t \|y - z\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x - y | y - z)$.

En faisant tendre $t \rightarrow 0$, on obtient $\operatorname{Re}(x - y | y - z) \geq 0$.

($\Leftarrow$) Supposons que $y \in C$ et $\forall z \in C, \operatorname{Re}(x - y | z - y) \leq 0$.

$$\begin{aligned} \forall z \in C, \|x - z\|^2 &= \|x - y + y - z\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \underbrace{\|y - z\|^2}_{\geq 0} + 2 \underbrace{\operatorname{Re}(x - y | y - z)}_{\geq 0} \\ &\geq \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout $z \in C$, alors $y = p_C(x)$ par unicité. □

Remarque.

- Il donne l'existence d'un supplémentaire orthogonal (projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé).
- Dans un espace de Hilbert, il remplace avantageusement le théorème de Hahn-Banach (plus simple, plus facile à démontrer et plus puissant et sans le lemme de Zorn).
- Très utile pour montrer le théorème de Riesz et l'alliance des deux donne le théorème de Lax-Milgram (qui est utile pour résoudre des EDP).
- Il donne aussi des expressions équivalentes à l'existence de solutions de systèmes d'inéquations linéaires (théorème de l'alternative).
- Il a des applications en théorie des jeux : un théorème fondamental sur l'existence de stratégies optimales, l'optimum de Pareto (situation telle qu'il est impossible d'améliorer le sort d'une personne sans réduire la satisfaction d'une autre).

Théorème de représentation de Riesz : Soit $(H, (\cdot | \cdot))$ un espace de Hilbert.

$$\forall \varphi \in H', \exists ! y \in H, \forall x \in H, \varphi(x) = (x | y)$$

Démonstration. Montrons que $\Phi : H \rightarrow H'$ est bijective.
 $y \mapsto (\cdot | y)$

• Montrons que Φ est surjective. Soit $\varphi \in H'$ avec $\varphi \neq 0$ (sinon $y = 0$).
 Comme $\text{Ker} \varphi$ est fermé alors $H = \text{Ker} \varphi \oplus (\text{Ker} \varphi)^\perp$. Et $\varphi \in H'$, c'est une forme linéaire non nulle alors $\text{Ker} \varphi$ est un hyperplan donc $\dim(\text{Ker} \varphi)^\perp = 1$.
 Soit $x_0 \in H \setminus \{0\}$ tel que $(\text{Ker} \varphi)^\perp = \mathbb{R}x_0$ et alors $\varphi(x_0) \neq 0$.

Pour $u \in H$, on pose $u' = u - \frac{(u | x_0)}{\|x_0\|^2} x_0$ donc $(u' | x_0) = 0$.

Ainsi, $u' \in (\mathbb{R}x_0)^\perp = \text{Ker} \varphi$ d'où $\varphi(u') = 0$. Posons $y = \frac{\varphi(x_0)}{\|x_0\|^2} x_0$.

Donc $\forall u \in H, \varphi(u) = (u | y)$ et Φ est surjective.

• Montrons que Φ est une isométrie. Soit $y \in H$.
 Par le théorème de Cauchy-Schwarz, $\forall x \in H, |\Phi(y)(x)| = |(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$.

Donc, $\|\Phi(y)\| \leq \|y\|$. Si $y \neq 0$, alors $\|\Phi(y)\| \geq \frac{|\Phi(y)(y)|}{\|y\|} = \|y\|$.

Comme Φ est linéaire alors Φ est une isométrie bijective. □