Théorème de Jordan dans le cas C^1

[On trouvera un exercice à trous dans le Gonnord & Tosel, *Calcul différentiel*, p.95. On trouvera également une version C^2 dans le Berger & Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, p.357]

Soit $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 vérifiant :

- $\gamma(0) = 0$
- $\gamma'(0) = 1$
- $\forall\, t \in \mathbb{R}, |\gamma'(t)| = 1$
- γ est L-périodique
- $\gamma_{|[0,L[}$ est injective

On pose $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$: c'est donc une courbe C^1 fermée qui ne s'auto-intersecte pas.

Théorème 1.1 (*de* Jordan, *cas* C^1)

$\mathbb{C}\backslash\Gamma$ a deux composantes connexes, l'une bornée, l'autre non.

Déroulement de la preuve :

1 ▸ *Pour $\delta > 0$, on pose $\gamma_\delta^\pm = \gamma_{\pm i}\gamma'$ et $z_\delta^\pm = \gamma_\delta^\pm(0)$ Montrer que $\exists\, \alpha > 0 : \forall\, 0 < \delta < \alpha, \gamma_\delta^\pm(\mathbb{R}) \cap \Gamma = \phi$.*

2 ▸ *Soit $0 < \delta < \alpha$. Montrer que tout point de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ peut être joint à z_δ^+ ou z_δ^- par un arc contenu dans $\mathbb{C}\backslash\Gamma$.*

3 ▸ *Montrer que* $\mathrm{Ind}_\gamma(z_\delta^+) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_\delta^-) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 1$

4 ▸ *Conclure*

---

1 ▸ Comme γ est C^1 et périodique, γ' est C^0 et périodique, donc d'après le théorème de Heine, γ' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2, |s-t| < \eta \implies |\gamma'(s) - \gamma'(t)| < 1$$

Soit $s \in \mathbb{R}$. D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à $t \mapsto \gamma(t) - t\gamma'(s)$:

$$\begin{aligned}
\forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ |t-s| < \eta \implies & \\
& |\gamma(t) - t\gamma'(s) - (\gamma(s) - s\gamma'(s))| \leqslant \sup_{|t-s|<\eta} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\gamma(t) - t\gamma'(s)\right]\right| \times |t-s| \\
& \leqslant \underbrace{\sup_{|t-s|<\eta} |\gamma'(t) - \gamma'(s)|}_{<1} \times |t-s| \\
& < |t-s|
\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad |s-t| < \eta \quad \implies \quad |\gamma(t) - \gamma(s) - (t-s)\gamma'(s)| < |t-s| \qquad (*)$$

Posons $K = \left\{(s,t) \in [0,L]^2 \mid L - \eta \geqslant |s-t| \geqslant \eta\right\}$ qui est compact comme fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Comme $(s,t) \mapsto |\gamma(s) - \gamma(t)|$ est continue sur K, théorème des bornes atteintes, il existe $(s_0,t_0) \in K$ tel que $\alpha \overset{\text{def}}{=} \inf_{(s,t)\in K} |\gamma(s) - \gamma(t)| = |\gamma(s_0) - \gamma(t_0)|$. Comme $(s_0,t_0) \in K$, $s_0 \neq t_0$ et $s_0 \neq t_0 + L$, mais $\gamma_{|[0,L[}$ est injective, donc $\gamma(s_0) \neq \gamma(t_0)$, donc $\alpha > 0$. Ainsi,

$$\forall\, (s,t) \in [0,L]^2, \quad L - \eta \geqslant |s-t| \geqslant \eta \quad \implies \quad |\gamma(t) - \gamma(s)| \geqslant \alpha$$

puis par périodicité de γ, on a :

$$\forall\, (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad (\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad |s - t - nL| \geqslant \eta) \quad \implies \quad |\gamma(s) - \gamma(t)| \geqslant \alpha \qquad (**)$$

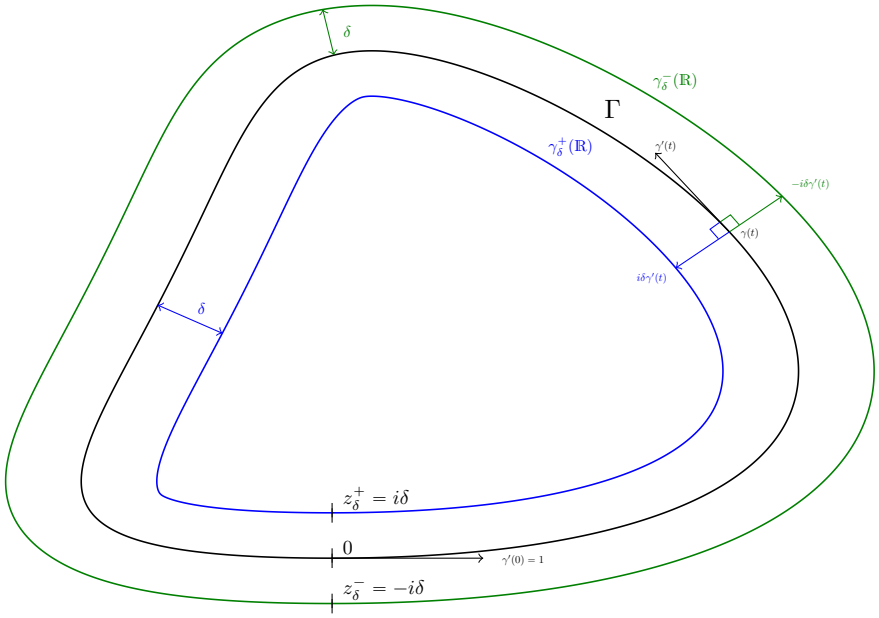

Figure 1.1 – Courbes Γ, $\gamma_\delta^+(\mathbb{R})$, $\gamma_\delta^-(\mathbb{R})$

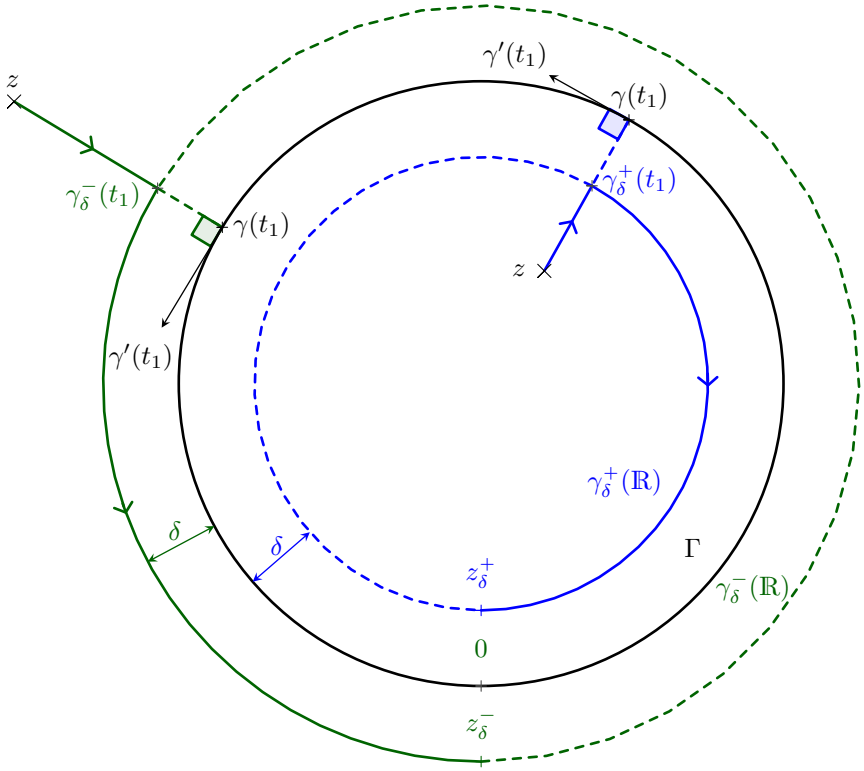

Figure 1.2 – Construction d'un arc convenable

(Une pause pour comprendre : l'idée est de prendre pour α la plus petite distance que l'on peut atteindre entre deux points sur la courbe, à un écart de temps donné. De manière contraposée comme on l'utilisera plus tard, si on contraint deux points sur la courbe à rester à une distance d'au moins α, alors ceux-ci correspondent à deux instants distants d'au moins η modulo la périodicité. On peut ici invoquer la périodicité car c'est le point dans le plan qui nous intéresse, pas l'instant auquel on y arrive.)

Soit $0 < \delta < \alpha$. Supposons par l'absurde que $\Gamma \cap \gamma_\delta^+(\mathbb{R}) \neq \varnothing$. Il existe donc $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma(t) = \gamma_\delta^+(s) = \gamma(s) + i\delta\gamma'(s)$. Comme $|\gamma'(s)| = 1$, $|\gamma(t) - \gamma(s)| = |i\delta\gamma'(s)| = \delta < \alpha$, donc d'après la (contraposée de) $(**)$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|t - s - nL| < \eta$. Comme ce sont les points et non les instants qui nous intéressent ici, quitte à remplacer $s - nL$ par s par périodicité, supposons que $n = 0$. D'après $(*)$, $|t - s| > |\gamma(t) - \gamma(s) - (t-s)\gamma'(s)| = |(i\delta - (t-s))\gamma'(s)| = |i\delta - (t-s)|$, ce qui est Absurde.
Donc $\Gamma \cap \gamma_\delta^+(\mathbb{R}) = \varnothing$, et on montre de même que $\Gamma \cap \gamma_\delta^-(\mathbb{R}) = \varnothing$.

2 ▸ Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$. La fonction $\varphi : t \in [0,L] \mapsto |\gamma(t) - z|^2$ est continue sur un compact, donc atteint un minimum en un $t_1 \in [0,L]$. Or φ est dérivable, et $\forall\, t \in [0,L]$, :

$$\varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\gamma(t) - z)\overline{(\gamma(t) - z)}\right] = \gamma'(t)\overline{(\gamma(t) - z)} + (\gamma(t) - z)\overline{\gamma'(t)} = 2\mathrm{Re}\left[(\gamma(t) - z)\overline{\gamma'(t)}\right]$$

Comme t_1 est un minimum, $\varphi'(t_1) = 0$, donc $\gamma'(t_1)$ et $\gamma(t_1) - z$ sont orthogonaux (on confondra les vecteurs et leurs affixes), donc $\gamma(t_1) - z$ et $i\gamma'(t_1)$ sont colinéaires (multiplier par i revient à faire un quart de tour dans le sens trigonométrique), donc $\gamma_\delta^\pm(t_1) = \gamma(t_1) \pm i\delta\gamma'(t_1)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ passant par $\gamma(t_1)$ et z.
(Une pause pour comprendre : l'idée est de projeter z sur Γ. Ce faisant, on voit sur un dessin que la droite passant par $\gamma(t_1)$ et z intersecte $\gamma_\delta^+(\mathbb{R})$ ou $\gamma_\delta^-(\mathbb{R})$ – c'est ce que l'on vient de démontrer. L'idée, illustrée sur le dessin suivant, est de relier z à $\gamma_\delta^\pm(t_1)$ selon lequel est le plus proche. Une fois en $\gamma_\delta^\pm(t_1)$, on relie ce point à $z_\delta^\pm$ en suivant $\gamma_\delta^\pm(\mathbb{R})$.
Remarque : à partir de là un explication orale sur le dessin suivant suffit, même est nécessaire pour accélérer la preuve.)

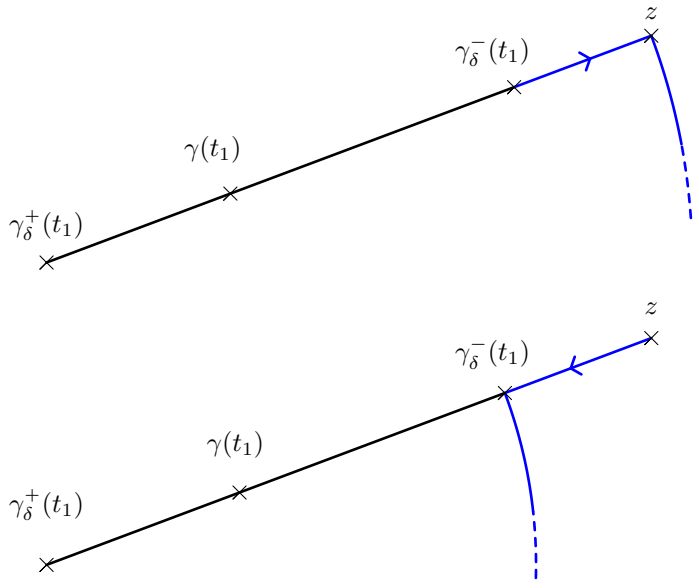

Figure 1.3 – Deux cas de figure

Les points $\gamma_\delta^\pm(t_1)$ sont de part et d'autre de $\gamma(t_1)$ sur $\mathcal{D}$, disons que z est du côté de $\gamma_\delta^+(t_1)$. Deux cas de figure, soit z est entre $\gamma(t_1)$ et $\gamma_\delta^+(t_1)$, soit z est de l'autre côté de $\gamma_\delta^+(t_1)$. Le segment reliant z à $\gamma_\delta^+(t_1)$ n'intersecte pas Γ (sinon cela contredirait la minimalité de $\gamma(t_1)$), et $\gamma_\delta^+(\mathbb{R})$ n'intersecte pas Γ d'après 1 ▸, donc le chemin ainsi construit est bien contenu dans $\mathbb{C}\backslash\Gamma$.

3 ▸ *Remarque : il n'y a pas le temps de présenter la partie suivante, et elle n'est pas spécialement intéressante, mais il faut tout de même savoir la faire.*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_\gamma(z_\delta^+) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_\delta^-) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_\delta^+} - \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_\delta^-}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(\gamma(t)+i\delta)-(\gamma(t)-i\delta)}{(\gamma(t)-i\delta)(\gamma(t)+i\delta)}\gamma'(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{2i\delta\quad\gamma'(t)}{\gamma(t)^2-(i\delta)^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\delta}{\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2+\delta^2}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Posons $a : t \in \mathbb{R}^* \mapsto \gamma(t)/t,\ 0 \mapsto 1$. La fonction a est continue sur $\mathbb{R}^*$ car γ l'est, et continue en 0 car $a(t) = \gamma(t)/t = (\gamma(t)-\gamma(0))/(t-0) \to \gamma'(0) = 1$. De là, $a(t)^2 \to 1$, donc il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad |t| < \eta \quad\Longrightarrow\quad |a(t)^2 - 1| < \frac{1}{2} \qquad (\dagger)$$

Comme $|\gamma|$ est continue et strictement positive sur le compact $\{t \in \mathbb{R} \mid \eta \leqslant |t| \leqslant L/2\}$ (puisque $\gamma_{[0,L[}$ est injective et $\gamma(0) = 0$), elle est minorée par une constante $m > 0$. De là,

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad \eta \leqslant |t| \leqslant \frac{L}{2} \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2+\delta^2}\right| = \frac{1}{|\gamma(t)^2+\delta^2|} \leqslant \frac{1}{m^2+\delta^2}$$

et $\displaystyle\int_{\eta<|t|<\frac{L}{2}} \left|\frac{1}{2\delta^2}\right|\ \mathrm{d}t < +\infty$, donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\eta<|t|<\frac{L}{2}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2+\delta^2}\ \mathrm{d}t \xrightarrow[\delta\to 0]{} \int_{\eta<|t|<\frac{L}{2}} \frac{\gamma'}{\gamma^2}$$

donc :

$$\frac{\delta}{\pi}\int_{\eta<|t|<\frac{L}{2}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2+\delta^2}\ \mathrm{d}t \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

Ensuite,

$$\frac{\delta}{\pi}\int_{|t|\leqslant\eta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2+\delta^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant\eta/\delta} \frac{\gamma'(\delta t)}{(\delta t)^2 a(\delta t)^2+\delta^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma'(\delta t)}{t^2 a(\delta t)^2+1}\mathbb{1}_{|t|\leqslant\eta/\delta}\ \mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\frac{\gamma'(\delta t)}{t^2 a(\delta t)^2+1}\mathbb{1}_{|t|\leqslant\eta/\delta} \xrightarrow[\delta\to 0]{} \frac{1}{1+t^2}$ (puisque γ' et a sont continues en 0) et pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \leqslant \eta/\delta$,

$$\left|\frac{\gamma'(\delta t)}{t^2 a(\delta t)^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{|t^2 a(\delta t)^2+1|} \leqslant \frac{1}{1+t^2\mathrm{Re}(a(\delta t)^2)} \leqslant \frac{1}{1+t^2/2}$$

d'après ($\dagger$). On a donc dominé l'intégrande par une fonction intégrable indépendante de δ, donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\frac{\delta}{\pi}\int_{|t|\leqslant\eta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)^2+\delta^2}\ \mathrm{d}t \xrightarrow[\delta\to 0]{} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 1$$

d'où le résultat.

Les deux premiers points se justifient à cette étape : pour faire tendre δ vers 0, on utilise le fait que l'étude précédente est vraie pour tout $\delta > 0$ petit.

4 ▸ D'après 2 ▸, $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ a au plus deux composantes connexes (par arcs). Comme Ind_γ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, ce-dernier a au moins 2 composantes connexes d'après 3 ▸, *in fine* 2 exactement.

Comme Γ est fermée, Γ est bornée, donc il existe un disque D tel que $\Gamma \subset D$. On note $\mathcal{E}$ et $\mathcal{I}$ les deux composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, au moins l'une d'entre elles n'est pas bornée. En effet, dans le cas contraire,

$\mathbb{C} = (\mathbb{C}\backslash\Gamma) \cup \Gamma = \mathcal{E} \cup \mathcal{I} \cup \Gamma$ serait borné, ce qui n'est pas. Quitte à échanger, disons que $\mathcal{E}$ n'est pas bornée. Par l'absurde, supposons $\mathcal{I}$ non bornée. Soient $z_{\mathcal{E}}$ et $z_{\mathcal{I}}$ dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{I}$ respectivement, et quitte à agrandir $\mathcal{D}$, supposons-les contenus dans $\mathcal{D}$. Comme $\mathcal{E}$ et $\mathcal{I}$ ne sont pas bornées, il existe des chemins $\gamma_{\mathcal{E}}$ et $\gamma_{\mathcal{I}}$ contenus dans $\mathcal{E}$ et dans $\mathcal{I}$ respectivement, dont le module tend vers $+\infty$. Mais alors ces chemins rencontrent tout deux ∂D en deux points $z_{\mathcal{E}}^D$ et $z_{\mathcal{I}}^D$, et on peut donc relier $z_{\mathcal{E}}$ à $z_{\mathcal{I}}$ par la concaténation des chemins $\gamma_{\mathcal{E}}$, ∂D entre $z_{\mathcal{E}}^D$ et $z_{\mathcal{I}}^D$, et $\gamma_{\mathcal{I}}$. Comme $z_{\mathcal{E}}$ et $z_{\mathcal{I}}$ sont dans deux composantes connexes distinctes de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$, ceci est impossible.

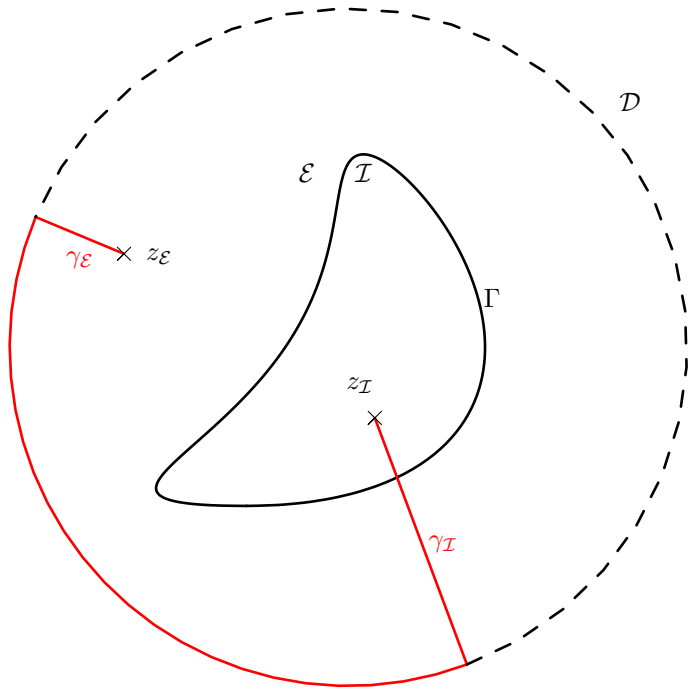

Figure 1.4 – Liaison interdite entre les deux composantes connexes

---

Commentaires :

- Recasages : 204 (Connexité. Exemples et applications.) et 267 (Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieure.) (pas 245 (Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.), même avec le point 3 ▸, puisqu'il s'agit de calcul intégral uniquement. Mais on peut le citer dans le plan en corollaire des propriétés de l'indice !)
- Ce développement est long : au tableau, il ne faut pas écrire de ligne superflue, et raccourcir les phrases pour n'en garder que le strict minimum essentiel. Il ne faut pas hésiter non plus à prouver certains points qui le permettent à l'oral avec un dessin comme support.
- Dans le cas où Γ est un polygone, l'idée de la démonstration repose sur le principe suivant : on choisit un vecteur non nul du plan, et pour chaque point qui n'est pas sur Γ, on compte le nombre d'intersections entre Γ et la demi-droite passant par ce point dirigée par le vecteur choisi. En remarquant que la parité de ce nombre d'intersections ne dépend pas du choix de la direction du vecteur (elle augmente ou diminue toujours d'un multiple de 2), on peut faire en sorte que la demi-droite précédente ne passe pas par un sommet du polygone. On crée ainsi deux classes de points, il reste à montrer que celles-ci sont connexes par arcs, avec la même idée que 1 ▸ et 2 ▸.

  Cette idée peut être reprise pour déterminer si un point donnée est à l'intérieur ou l'extérieur de Γ, ce qui n'est pas toujours évident : on choisit un vecteur non nul du plan telle que la demi-droite passant par le point et dirigée par le vecteur ne passe pas par un sommet de Γ, et on compte le nombre d'intersections.

S'il est pair, le point est à l'extérieur (en suivant la demi-droite, on sort de Γ autant de fois qu'il y rentre), et sinon, il est à l'intérieur (on sort une fois de plus que l'on ne rentre).

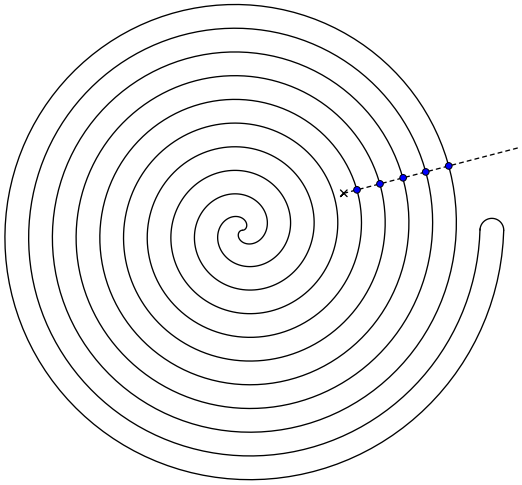

Figure 1.5 – Critère de vérification en pratique

- Dans une version plus complète, le théorème de Jordan affirme que tout chemin fermé qui ne s'auto-intersecte pas délimite deux régions du plan disjointes, l'une homotope à un disque, l'autre homotope à un plan privé d'un disque. On peut énoncer un théorème de Jordan en dimension supérieure, en disant qu'une hypersurface homotope à une hyper-shpère délimite deux régions connexes disjointes de l'hyper-espace, l'une bornée, l'autre non. Cependant, la région bornée n'est pas homotope à une hyper-boule en dimension au moins 3 : en effet, la simple connexité n'est pas préservée.
- La vidéo de El Jj sur le théorème de Jordan est un incontournable !