$\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ et les quaternions

- Perrin, *Cours d'algèbre.*

> $\mathbb{H}$ est une algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ de base $(1, i, j, k)$.
> Pour $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, on définit la norme $N(q) = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.
> On a le produit scalaire $\langle q, q' \rangle = \dfrac{N(q + q') - N(q - q')}{4}$.
> $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ car aucun quaternion non réel ne commute avec i, j et k.
> On a $\forall q, r \in \mathbb{H},\ \overline{qr} = \bar{r}\ \bar{q}$ (juste vérifier pour i, j, k grâce à la $\mathbb{R}$-linéarité de la conjugaison et la $\mathbb{R}$-bilinéarité de $\times$).

Soit G le groupe des quaternions de $\mathbb{H}$ de norme 1. On a un isomorphisme $G/\{\pm 1\} \to \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration.
- Faisons agir $G \curvearrowright \mathbb{H}$ par automorphismes intérieurs (action non triviale car $\mathbb{H}$ n'est pas abélien). Pour tout $q \in G$, notons $S_q : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ q' & \mapsto & qq'q^{-1} = qq'\bar{q} \end{array}$ (car $q \in G$ et $q\bar{q} = 1$)

S_q est $\mathbb{R}$-linéaire et bijective d'inverse $S_{\bar{q}}$. Donc on peut définir

$$S : \begin{array}{ccc} G & \to & GL_4(\mathbb{R}) \simeq GL(\mathbb{H}) \\ q & \mapsto & S_q \end{array}$$

C'est un morphisme car $S_{q_1 q_2}(q') = q_1 q_2 q' \bar{q}_2 \bar{q}_1 = S_{q_1} \circ S_{q_2}(q')$.
Donc S est bien une action $G \curvearrowright \mathbb{H}$.
- Calcul de Ker$S$: Soit $q \in \text{Ker}S$ i.e. $S_q = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Donc $\forall q' \in \mathbb{H},\ S_q(q') = q'$ ainsi $qq' = q'q$. Donc $q \in Z(\mathbb{H}) \cap G = \mathbb{R} \cap G = \{\pm 1\}$. D'où Ker$S = \{\pm 1\}$.
- Pour $q \in G$, montrons que S_q est une isométrie i.e. S_q conserve la norme N :
En effet, pour $q' \in \mathbb{H}$, $N(S_q(q')) = N(qq'\bar{q}) = N(q)N(q')N(\bar{q}) = N(q')$.
Ainsi, $\forall q \in G,\ S_q \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$.
- En fait, on va même montrer que c'est une isométrie de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Notons $P = \{bi + cj + dk,\ (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\}$ l'ensemble des quaternions purs P est l'orthogonal de $\mathbb{R} = \mathbb{R}1$ pour le produit scalaire dont provient N i.e. $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus P$.
Ainsi comprendre S_q (pour $q \in G$) revient à comprendre $S_{q|\mathbb{R}}$ et $S_{q|P}$.
On a $S_{q|\mathbb{R}} = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ car $\mathbb{R} = Z(\mathbb{H})$. Donc $\mathbb{R}$ est stable par S_q et comme $S_q \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$, alors $P = \mathbb{R}^\perp$ est stable par S_q.
Posons $s_q = S_{q|P}$, on a toujours que s_q conserve la norme N, ainsi $s_q \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Par conséquent, $s : G \to \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ est un morphisme tel que Ker$s = \{\pm 1\}$.
- Plongement dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$: Par rapport à la topologie naturelle de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, s est continue. En effet, si $q = a + bi + cj + dk \in G$ alors on peut calculer les coefficients de la matrice s_q dans la base (i, j, k) : ce sont des polynômes homogènes de degré 2 en les coefficients a, b, c, d, d'où la continuité.
$s_q(i) = qi\bar{q} = i(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + 2j(bc + ad) + 2k(bd - ac)$ donc $s_{1,1} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ et $s_{1,2} = 2(bc + ad)$...
L'application det : $\mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$ est continue. Donc $\det \circ\, s : G \to \{\pm 1\}$.
Or G est connexe (car homéomorphe à la sphère S^3). Donc $\det \circ\, s(G)$ est connexe et inclus dans $\{\pm 1\}$. Comme $\det(s_1) = \det(\text{Id}) = 1$, alors $\det \circ\, s(G) = \{1\}$.
Finalement, $s(G) \subset \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.
- Montrons que $s(G) = \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ (i.e. s est bijective). Pour cela, on montre que tous les renversements sont atteints. Soit $q \in P \cap G$.

Comme $q \in G$, alors $s_q(q) = qq\bar{q} = q$. Donc, s_q fixe q, c'est **UNE** rotation d'axe $\langle q \rangle$.
D'autre part, $q \in P$ donc $q = -\bar{q}$ donc $q^2 = -q\bar{q} = -1$.
Et $(s_q)^2 = s_{q^2} = s_{-1} = \mathrm{Id}$, d'où s_q est une involution i.e. **LE** renversement d'axe $\langle q \rangle$.
Or les renversements engendrent $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Donc $s(G) = \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.
Par le premier théorème d'isomorphisme, on obtient bien que $G/\{\pm 1\} \simeq \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. □

Remarque. Ce théorème revient à dire que « Toute rotation de $\mathbb{R}^3$ peut être vue comme un quaternion de norme 1 ».
En fait on a une isométrie $\varphi : \begin{array}{ccc} (P, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathbb{H}}) & \to & (\mathbb{R}^3, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathrm{can}}) \\ bi + cj + dk & \mapsto & (b, c, d) \end{array}$

Corollaire : $SU_2(\mathbb{C})/\{I_2\} \simeq \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration. Considérons $\mathbb{C}$ comme un sous-corps de $\mathbb{H}$ et $(1, j)$ comme une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{H}$ ($q = a + bi + cj + dk = (a + ib) + j(c - di)$).
On a $G \curvearrowright \mathbb{H}$ par $q \mapsto (T_q : q' \mapsto qq')$ avec $T_q \in GL_2(\mathbb{C})$.
Si $q = 1\lambda + j\mu$ alors $T_q = \begin{pmatrix} \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ et $\det T_q = |\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$ car $q \in G$.
Donc $T_q \in SU_2(\mathbb{C})$ et $q \mapsto T_q$ est bijectif. D'où $G \simeq SU_2(\mathbb{C})$. □

Rappels : $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions.
Si $n = \dim E \geqslant 3$, alors $\mathcal{SO}(E)$ est engendré par les renversements.

Démonstration.
- Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Posons $\mathrm{Fix}(u) = \{x \in E,\ u(x) = x\}$ et $d_u = n - \dim \mathrm{Fix}(u)$.

Montrons que u est le produit d'au plus d_u réflexions (par récurrence sur d_u).
Si $d_u = 0$ alors $u = \mathrm{Id}$. Donc c'est vrai.
Supposons $d_u > 0$. Soit $x \in \mathrm{Fix}(u)^\perp \backslash \{0\}$.
Posons $y = u(x)$, alors $y \neq x$ (car $x \notin \mathrm{Fix}(u)$) et $y \in \mathrm{Fix}(u)^\perp$ (car u-stable).
Comme $\|x\| = \|y\|$ alors $(x - y \mid x + y) = 0$. Donc $(x - y) \perp (x + y)$.
Soit r la réflexion définie par $x - y$.
Ainsi, $r(x - y) = y - x$ et $r(x + y) = x + y$. Donc $r(y) = x$. Comme $x - y \in \mathrm{Fix}(u)^\perp$ alors $r_{|\mathrm{Fix}(u)} = \mathrm{Id}$, d'où $\mathrm{Fix}(u) \subset \mathrm{Fix}(ru)$ et $x \in \mathrm{Fix}(ru) \backslash \mathrm{Fix}(u)$ alors $d_{ru} < d_u$.
Par récurrence, $ru = r_1 \dots r_k$ et $k \leqslant d_{ru}$. Ainsi, $u = rr_1 \dots r_k$ et $k + 1 \leqslant d_u$.

- Si $n = 3$. Soit $u \in \mathcal{SO}(E)$. Donc u s'écrit comme produit d'au plus 3 réflexions et comme $\det u = 1$ alors u est le produit de 0 ou 2 réflexions.

Si $u \neq \mathrm{Id}$ (Id produit de 0 réflexions) alors $u = r_1 r_2$ où r_1, r_2 sont 2 réflexions.
Comme $n = 3$ alors $-r_i = \sigma_i$ est un renversement. D'où $u = \sigma_1 \sigma_2$.

- Si $n > 3$, on a $u = r_1 \dots r_{2p}$ (nombre pair de réflexions). Il suffit alors de montrer que pour toutes réflexions r_1, r_2, il existe σ_1, σ_2 des renversements tels que $r_1 r_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Soient H_1, H_2 les hyperplans de r_1, r_2.
Soit $V \subset H_1 \cap H_2$ tel que $\dim V = n - 3$ (OK car $n > 3$), $u_{|V} = \mathrm{Id}$ et $u(V^\perp) \subset V^\perp$. D'après le premier cas, $u_{|V^\perp} = \sigma_1 \sigma_2$. On obtient le résultat en prolongeant les σ_i par Id sur V. □